

B. Brunone, S. Meniconi, C. Capponi

*Fondamenti di Meccanica dei Fluidi Incomprimibili
per allievi del corso di Laurea in Design*

Morlacchi Editore *U.P.*

In copertina: simulazione mediante Computational Fluid Dynamics (CFD) del campo di moto in corrispondenza di un orificio (N. Martins, D. Covas, S. Meniconi, C. Capponi e B. Brunone).

In quarta di copertina: in trasparenza, una vista del Laboratorio di Ingegneria delle Acque (WEL) del Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale dell'Università degli Studi di Perugia.

Prima edizione: 2021

Ristampe 1.
2.
3.

ISBN/EAN: 978-88-9392-269-2

Copyright © 2021 by Morlacchi Editore, Perugia.

Tutti i diritti riservati. È vietata la riproduzione, anche parziale, con qualsiasi mezzo effettuata, compresa la copia fotostatica, non autorizzata.

redazione@morlacchilibri.com – www.morlacchilibri.com.

Stampato nel mese di maggio 2021 da Logo srl, Borgoricco (PD).

Indice

Introduzione	I
1 I fluidi: comportamento e principali proprietà	5
1.1 Generalità sui fluidi	5
1.2 I fluidi come mezzi continui	6
1.3 Densità e peso specifico	8
1.4 Condizione di aderenza e viscosità	9
1.4.1 Legge di Newton e misura della viscosità	10
1.5 Forze e sforzi in una massa fluida	15
1.6 Alcuni numeri adimensionali	17
1.7 Equazione di stato e comprimibilità	18
1.8 Tensione di vapore e solubilità dell'aria in acqua	20
2 Comportamento dei fluidi in quiete	23
2.1 Premessa	23
2.2 Legge di Stevin	23
2.3 Unità di misura della pressione	29
2.4 Strumenti di misura della pressione	29
2.4.1 Il piezometro	30
2.4.2 Il manometro a U	30
2.4.3 Trasduttori di pressione	30
Esercizi proposti	35
3 Cenni di cinematica e equazioni delle correnti	39
3.1 Schematizzazione del campo di moto	39
3.2 Meccanismi di scambio di massa e definizione di portata	41
3.3 Distribuzione delle pressioni in una corrente e correnti gradualmente variate	42
3.4 Equazioni di continuità	45
3.4.1 Equazione di continuità per un filetto fluido	46
3.4.2 Equazione di continuità per una corrente	46
3.5 Teorema di Bernoulli per un filetto fluido	47
3.6 Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente gradualmente variata .	51
3.7 Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente gradualmente variata di liquido reale	52
3.8 Strumenti di misura della portata	53
3.8.1 Misuratori di portata ad induzione elettromagnetica	53
3.8.2 Misuratori di portata ad ultrasuoni	54

4	Processi di moto debolmente dissipativi	59
4.1	Premessa	59
4.2	Il tubo di Pitot	59
4.3	Processi di efflusso attraverso una luce	63
4.4	L'effetto Venturi e il venturimetro	68
	Esercizi proposti	71
5	Moto uniforme laminare e turbolento	75
5.1	Moto laminare e turbolento	75
5.1.1	Le esperienze di Reynolds	78
5.2	L'abaco di Moody	80
	Esercizi proposti	85
5.2.1	Esercizio 5.3	86
6	Processi di moto nei mezzi porosi artificiali	89
6.1	Premessa	89
6.2	La legge di Darcy della filtrazione	90
6.3	Una <i>gustosa</i> applicazione della legge di Darcy	92

Introduzione

Nell'A.A. 2017-2018, grazie al decisivo e lungimirante impegno di Paolo Belardi e Giovanni Gigliotti, l'Università degli Studi di Perugia ha attivato il Corso di Studi (CdS) in *Design* (Classe di Laurea in Disegno Industriale – L4) con sede presso il Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale (DICA).

Le motivazioni alla base di questa iniziativa sono state molteplici¹.

In primo luogo, la collocazione geografica di Perugia. Rispetto ai CdS attivi nelle regioni limitrofe (Sapienza Università di Roma, Firenze e Camerino), infatti, quello presso l'Ateneo di Perugia è fortemente connesso alla presenza in Umbria di specifiche eccellenze in grado di trainare l'economia, anche nazionale, nel settore della produzione e lavorazione di materiali quali, ad esempio, il legno, il cartone, la ceramica, i tessuti e il vetro. Il nuovo CdS ha come presupposto la constatazione che il *Design* è uno dei punti di forza del "made in Umbria": un'arte a tutti gli effetti, esportata e apprezzata in tutto il mondo, che contribuisce a valorizzare e internazionalizzare la produzione locale mediante una nuova visione dei materiali tradizionali, veicolata sia dagli allestimenti stabili sia da quelli temporanei.

In secondo luogo, la possibilità di una forte sinergia con l'Accademia di Belle Arti 'Pietro Vannucci' di Perugia – la seconda Accademia più antica d'Italia, in quanto fondata nel 1573 – realizzando in questo modo un felice connubio tra Scienza, Tecnica ed Arte.

In terzo luogo, la circostanza per cui nell'Università di Perugia non sono attivi CdS, anche di altra Classe, aventi come obiettivo formativo figure professionali capaci di operare criticamente, con elevate competenze sia tecniche sia artistiche, nel settore del progetto per il *Design*, con specifico riferimento all'*Interior Design* e all'*Exhibit Design*.

Infine, ma motivazione questa senz'altro di grande importanza, gli esiti occupazionali dei CdS nella Classe L4 risultati più che soddisfacenti sulla base non solo dei dati statistici disponibili a livello nazionale (AlmaLaurea) e internazionale (International Council of Design), ma anche delle informazioni raccolte mediante la consultazione di organizzazioni e stakeholder interessati all'offerta formativa del DICA.

Ritornando alle nuove e versatili figure professionali che il CdS in *Design* si prefigge di formare, particolare attenzione è rivolta a:

- *Interior Design*: progettazione degli spazi interni semplici e complessi e riconversione di attrezzature, in un'accezione ampliata di tali tipologie, che coinvolga le nuove modalità abitative, commerciali, lavorative, formative e ludiche nonché contesti inediti quali, ad esempio, i siti industriali dismessi;
- *Exhibit Design*: progettazione degli spazi aperti e chiusi delle città, in relazione non soltanto a occasioni espositive, fieristiche e festivaliere (allestimento legato anche alla

¹Fonte: Documento di Progettazione del CdS (L4) *Design* presso l'Università degli Studi di Perugia, giugno 2016.

fruizione di beni culturali) ma anche e soprattutto alla valorizzazione, riconfigurazione e ridefinizione dell'identità di tali luoghi e del patrimonio territoriale/ambientale in generale (ad esempio, parchi e giardini);

- *Retail Design*: progettazione degli spazi commerciali in senso lato (dal punto vendita allo *shopping mall*) volta a instaurare nuove modalità di fruizione e relazione tra il consumatore e i prodotti, in riferimento sia allo spazio fisico (*retail store*) sia a quello virtuale (*retail space*).

Con riferimento alle urgenze rappresentate anche nel *Design* dalle problematiche ambientali e dai cambiamenti climatici, a completamento del percorso formativo, nell'A.A. 2019-2020 è stato attivato congiuntamente fra l'Università degli Studi di Perugia e l'Università degli Studi della Campania 'Luigi Vanvitelli' il Corso di Laurea in *Planet Life Design*. Ciò anche per tenere conto che una considerevole percentuale dei laureati in *Design* manifesta l'interesse a conseguire una laurea magistrale.

Il carattere di innovatività del CdS in *Design* dell'Ateneo Perugino prende spunto dalla considerazione dell'irruzione delle nuove tecnologie nel contesto urbano e territoriale, anche in ambito artistico, sociale ed economico. Attraverso il nuovo CdS si vuole infatti infondere negli allievi la capacità di valutare in maniera appropriata i processi di sviluppo e produzione di artefatti, prodotti e materiali finalizzati al miglioramento della fruizione dell'ambiente e alla sua conservazione. L'orientamento specialistico del CdS in *Design* consente, pertanto, di individuare un'unica area tematica di carattere generale, al cui interno si inseriscono competenze disciplinari di carattere tecnico-scientifico, metodologico-progettuale, socio-culturale, tecnologico-impiantistico, botanico, comunicativo ed economico-giuridico.

Affinché le figure professionali formate posseggano solide conoscenze di base di natura scientifica e tecnologica – oltre che umanistica – sono stati introdotti corsi che non trovano corrispondenza nei CdS attivati presso altri Atenei. Si tratta, in particolare, dei corsi in “Scienze di Base per il Design” (8 CFU) – articolato su due moduli (“Analisi Matematica” e “Fisica”) – e “Scienze Applicate per il Design” (10 CFU), articolato anch'esso su due moduli (ciascuno di 5 CFU): “Fondamenti di Meccanica dei Fluidi e Misure” e “Fisica Tecnica Industriale”. A partire dall'A.A. 2021-2022, in uno dei due nuovi percorsi formativi previsti, allo studente sarà offerta la possibilità di seguire il modulo di “Design delle Forme d'Acqua”. In questo modulo, grazie alle basi messe in quello di “Fondamenti di Meccanica dei Fluidi e Misure”, saranno approfondite tematiche quali, ad esempio, il risparmio idrico e le sue implicazioni sui criteri di progetto dei dispositivi erogatori e l'idrodinamica degli oggetti (ad esempio, i veicoli). Si coltiva, inoltre, l'ambizione di introdurre gli allievi alla *Computational Fluid Dynamics* (CFD), uno strumento dalle enormi potenzialità e del quale la copertina di questo fascicolo offre un esempio significativo.

Presentato l'innovativo impianto del CdS in *Design* dell'Università degli Studi di Perugia, è necessario a questo punto illustrare i contenuti e la metodologia di insegnamento del corso di “Fondamenti di Meccanica dei Fluidi e Misure” al fine di inquadrare il presente fascicolo dal punto di vista didattico.

Nell'A.A. 2018-2019, all'atto di organizzare il primo corso, ci siamo trovati, pur con tutte le differenze del caso, nella stessa condizione menzionata da George K. Batchelor, nel suo *Fluid Dynamics*², Founding Editor della prestigiosa rivista *Journal of Fluid Mechanics*, una delle

²Batchelor, G.K. (1967). *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, United Kingdom.

*Bibbie della Meccanica dei Fluidi*³. Nella *Preface* di tale opera, Batchelor discute, infatti, della difficoltà di offrire lo stesso corso e uno stesso testo ad allievi ingegneri e matematici applicati. I primi con una spiccata predilezione per i casi reali e i secondi, invece, fortemente attratti dalle *soluzioni analitiche*. Pur essendo egli stesso un matematico applicato, traspare chiaramente la sua preoccupazione per l'atteggiamento dei matematici che sarebbero interessati a *problems which are mathematically solvable but not necessarily related to what happens in real fluids*. Questo suo convincimento lo fa definire⁴ *a keen advocate of the need for physical understanding and sound experimental basis*.

Mutatis mutandis, lo stesso dilemma si è posto a noi con la variante di dover presentare ad allievi di *Design* argomenti che eravamo abituati ad offrire a studenti di Ingegneria.

Nel primo anno del corso abbiamo risolto il problema utilizzando al massimo le installazioni allora presenti nel *Laboratorio di Ingegneria delle Acque (WEL)* del DICA. Molte esercitazioni furono organizzate dividendo gli studenti in gruppi per consentire loro di eseguire in prima persona tutte le misure necessarie per caratterizzare i processi di moto esaminati.

Poi, sulla nostra attività didattica si è abbattuto, come su tante altre attività umane, il COVID-19 che ci ha obbligati ad una radicale e rapida riorganizzazione di un corso peraltro appena nato. Da qui, dovendo svolgere lezioni essenzialmente teoriche, l'acuirsi della menzionata problematica sulla metodologia di insegnamento. Abbiamo quindi rielaborato gli argomenti selezionati presentandoli in una forma che, rispetto ai testi per Ingegneri, privilegia l'aspetto fisico rispetto a quello analitico. Ovvero, propone trattazioni le più chiaramente e direttamente legate ai principi della Fisica. Abbiamo quindi *testato* questa metodologia interagendo con gli studenti che hanno risposto con grande interesse e partecipazione proponendo anche alcune modifiche ed integrazioni.

Speriamo di aver raggiunto l'obiettivo: introdurre gli studenti di *Design* all'affascinante *mondo dei fluidi* affinché nella loro successiva vita professionale se ne possano avvalere, nelle infinite applicazioni che essi offrono, con consapevolezza e rispetto. Non dimentichiamo che si tratta della prima edizione che, come tale, verrà arricchita ed ampliata a breve termine. In particolare, ci prefiggiamo di migliorare le parti dedicate alle più moderne strumentazioni di misura e di proporre un maggior numero di esercizi includendone sia il procedimento di soluzione sia i risultati numerici. Confidiamo che qualche inevitabile *semplificazione* introdotta nella trattazione di alcuni degli argomenti proposti ci sia perdonata considerando gli obiettivi e i limiti – anche di durata (45 ore) – del corso⁵. Per gli studenti interessati ad approfondire, al termine di ciascun capitolo sono comunque indicati alcuni testi di riferimento.

Per concludere, un ringraziamento va all'ing. Filomena Maietta, allieva dell'International Doctoral Program in *Civil and Environmental Engineering* (XXXVI Ciclo), finanziato dall'Università degli Studi di Perugia e dal progetto "DICA - Dipartimento di Eccellenza 2018-2022", per la preziosa collaborazione.

Perugia, aprile 2021

Bruno Brunone, Silvia Meniconi, e Caterina Capponi

³*Meccanica dei Fluidi e Dinamica dei Fluidi* sono spesso usate come sinonimi. Formalmente, la prima include anche la *Statica dei Fluidi* che però può anche essere vista come un caso *molto* particolare di moto.

⁴Fonte: Wikipedia.

⁵Sarà difficile emulare il successo del testo di Giulio De Marchi – *Nozioni di Idraulica*, Ed. Agricole, 1948 – scritto per gli studenti della Facoltà di Agraria.

Capitolo I

I fluidi: comportamento e principali proprietà

1.1 Generalità sui fluidi

Definire che cosa sia un fluido è paradossalmente reso difficile dal fatto che la nostra vita dipende in maniera decisiva da due fluidi: quello in cui viviamo immersi e respiriamo (l'aria) e quello che costituisce la gran parte del corpo umano e senza il quale non possiamo vivere se non per pochi giorni (l'acqua). I fluidi, quindi, sono tanto naturalmente parte della nostra vita da non avvertire l'esigenza di chiederci esattamente che cosa siano e di darne una definizione scientificamente esatta.

Un approccio efficace a tale problema può essere quello di definire i fluidi in contrapposizione ai solidi dai quali si differenziano in maniera evidente. In termini di “plain language”, e quindi rimanendo sul piano descrittivo, possiamo affermare che i solidi sono “duri” e non cambiano facilmente né la forma né il volume occupato. Al contrario, possiamo dire che i fluidi presentano una bassa consistenza, appaiono cioè “molliti”, e si deformano molto facilmente tanto che, come detto, ci muoviamo molto facilmente in uno di essi. Un'evidente differenza sussiste, nell'ambito dei fluidi, fra i liquidi e i gas. Dei primi, infatti, è esperienza comune che cambino facilmente la forma (viene in particolare assunta quella del contenitore) ma non il volume, mentre i secondi occupano tutto lo spazio a loro disposizione.

Approfondendo e precisando meglio il discorso, le evidenziate differenze di comportamento fra solidi e fluidi si possono attribuire alla diversità in termini sia di densità molecolare sia di intensità delle forze intermolecolari. Nei solidi, infatti, le deformazioni sono ostacolate dalle importanti forze intermolecolari coesive esistenti e dalla ridotta distanza intermolecolare. Nei fluidi, la maggiore distanza fra le particelle, dovuta alla minore densità molecolare, e le minori forze intermolecolari sono alla base della loro maggiore deformabilità. Nel caso dei gas, in particolare, le forze intermolecolari sono trascurabili e la distanza fra le particelle è maggiore rispetto a quella che si verifica nei liquidi. Da qui la loro menzionata capacità di occupare tutto lo spazio a disposizione.

Un ulteriore approfondimento del problema può essere fatto con riferimento al comportamento dei solidi e dei fluidi per effetto di un'assegnata sollecitazione esterna. Tale approccio sarà discusso più avanti dopo aver introdotto il concetto di viscosità.

1.2 I fluidi come mezzi continui

In molti dei fenomeni di interesse per la Meccanica dei Fluidi non è necessario – ma è senz'altro estremamente complesso ed oneroso dal punto di vista computazionale – studiare il comportamento delle singole particelle che costituiscono un fluido. Inoltre, alla scala molecolare un mezzo fluido apparirebbe discontinuo, con molecole in movimento in uno spazio vuoto. Questo problema è chiaramente discusso nel testo di *Gallati e Sibilla* (2009) a cui pertanto nel seguito si fa ampio riferimento.

Si consideri un volume W e, al suo interno, i due volumi più piccoli W_1 e W_2 rappresentati in Fig.1.1. In questa figura le frecce schematizzano gli scambi di massa fra i volumi W_1 e W_2 e l'esterno avvenuti in un intervallo di tempo Δt . Il cerchietto (pieno) posto in corrispondenza della base della freccia indica la posizione della generica molecola al tempo iniziale mentre quello (vuoto) in corrispondenza della punta indica la sua posizione al tempo Δt .

Si faccia inizialmente riferimento al volumetto più piccolo, W_1 (Fig.1.1a). In tale volumetto, la molecola che al tempo iniziale si trovava all'interno di W_1 , trascorso l'intervallo di tempo considerato, Δt , si trova all'esterno dello stesso. Di conseguenza, la massa contenuta in W_1 passa dal valore m (= massa della molecola) a zero. In tale intervallo, quindi, la densità, ρ (che sarà definita nel seguito come massa per unità di volume), riferita per convenzione al baricentro di W_1 , è una funzione discontinua del tempo. Essa, infatti, è pari a m/W_1 al tempo iniziale e pari a zero al tempo Δt .

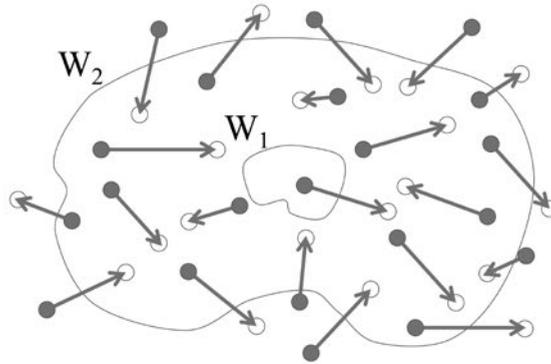
Si consideri, invece, il volumetto più grande W_2 che ha una dimensione tale che il numero delle molecole che entrano e quelle che escono nell'intervallo di tempo Δt sia mediamente lo stesso (Fig.1.1a). Per questo motivo la densità, attribuita al baricentro di W_2 , rimane costante durante Δt e pari ad un valore medio ρ_c , caratteristico del mezzo fluido considerato (Fig.1.1b).

Il volume W_2 sopra definito viene denominato *particella fluida*, in inglese *representative elementary volume (REV)*. La particella fluida può quindi essere definita come una porzione di fluido, di opportune dimensioni, nella quale, in un assegnato intervallo di tempo Δt , il valore della densità non dipende dal disordine dell'aggregazione molecolare ma da cause che riguardano l'intero volume di fluido a cui la particella appartiene. Questo ragionamento può essere ripetuto per tutte le grandezze cinematiche e dinamiche (ad esempio, velocità, accelerazione, pressione, ...). Come già accennato a proposito della densità, per convenzione il valore di tutte le grandezze viene attribuito al baricentro della particella fluida.

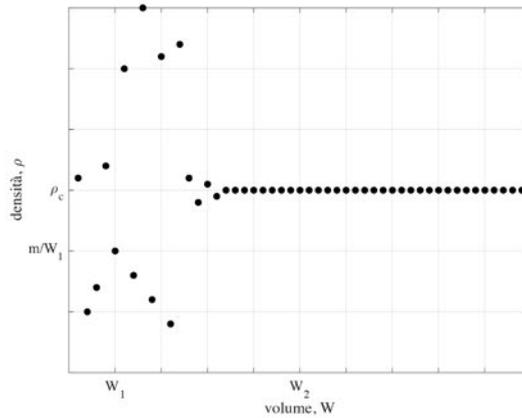
L'introduzione del concetto di particella fluida, ovvero il considerare una massa fluida come un insieme di particelle fluide, consente di prescindere dalle discontinuità che si verificano alla scala molecolare (dovute al disordine delle molecole) e a considerare quindi i fluidi quali *mezzi continui*. Ciò implica che tutte le proprietà e grandezze dei fluidi siano funzioni continue e derivabili.

La definizione di particella fluida equivale ad assumere una *scala minima di osservazione* che deve essere sempre maggiore della scala molecolare. Il corrispondente intervallo di tempo Δt viene definito come *scala temporale di osservazione*.

La dimensione della particella e la durata dell'intervallo di tempo Δt dipendono strettamente dal tipo di fenomeno e dalle finalità dello studio, nonché dagli strumenti di misura e/o di calcolo disponibili. Sono dunque valori plausibili, ad esempio, il millimetro associato ad un centesimo di secondo, nello studio della turbolenza (misura tipicamente di laboratorio), e la decina di centimetri associata a qualche secondo, nelle misure di velocità in un corso d'acqua naturale (misura di campo).



(a)



(b)

Figura 1.1: Definizione di particella fluida: a) schematizzazione degli scambi di massa fra volumi di fluido (il cerchietto pieno posto in corrispondenza della base della freccia indica la posizione della generica molecola al tempo iniziale mentre quello vuoto in corrispondenza della punta indica la posizione trascorso un intervallo tempo Δt); b) variazione della densità in dipendenza della dimensione del volume considerato (da Gallati e Sibilla, 2009).

Il modello di fluido come mezzo continuo consente di interpretare quasi tutti i fenomeni di interesse per la Meccanica dei Fluidi (Scarsi, 1992). Fanno eccezione alcune situazioni particolari quali, ad esempio: i moti browniani, la dinamica degli oli a grosse molecole, i fenomeni di trasporto in regime laminare e la dinamica dei corpi in gas molto rarefatti. L'ipotesi di mezzo continuo, inoltre, può non essere verificata in corrispondenza di particolari superfici. È questo il caso, ad esempio, della superficie di separazione fra fluidi non miscibili e delle superfici immerse in una massa fluida in corrispondenza delle quali alcune grandezze fisiche variano bruscamente (ad esempio, le superfici di discontinuità della velocità nei getti e nelle scie).

1.3 Densità e peso specifico

Come anticipato, la *densità*, ρ , di un fluido è definita come il rapporto fra la sua massa, m , e il volume, W , che la contiene:

$$\rho = \frac{m}{W} \quad (1.1)$$

In base a tale definizione, la densità ha dimensioni $[M/L^3]$; nel Sistema Internazionale (S.I.), la densità si può esprimere in kg/m^3 .

Quando, come verrà meglio discusso nel seguito, si può prescindere dalla variabilità di ρ , è utile introdurre il *peso specifico*, γ , che è definito dalla relazione:

$$\gamma = \rho g \quad (1.2)$$

in cui g rappresenta l'accelerazione di gravità. Nei calcoli, si assume il valore convenzionale $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$.

La densità, che è una proprietà del fluido, dipende dalla pressione e dalla temperatura. La struttura della relazione che lega ρ a tali grandezze sarà esaminata in dettaglio nel seguito. In questo paragrafo appare di interesse fornire il valore di ρ per alcuni fluidi (Tab. 1.1) a temperatura ambiente – assunta convenzionalmente pari a 20°C – nonché l'andamento della densità dell'acqua con la temperatura alla pressione atmosferica (Fig.1.2). Da tale diagramma risulta che la densità dell'acqua aumenta fino alla temperatura di 4°C per poi diminuire.

Per l'acqua, purché la temperatura non superi i $40\text{-}50^\circ\text{C}$, si assume per ρ il valore convenzionale di 1000 kg/m^3 a cui corrisponde per il peso specifico il valore $\gamma = 9810 \text{ N/m}^3$.

Tabella 1.1: Densità di alcuni fluidi a temperatura ambiente (20°C) e pressione atmosferica.

Fluido	Densità, ρ (kg/m^3)
Aria	1.204
Acqua	998.2
Olio d'oliva	913.7
Benzina	720.0
Alcool Etilico	789.0
Acetone	792.0
Mercurio	13579.0

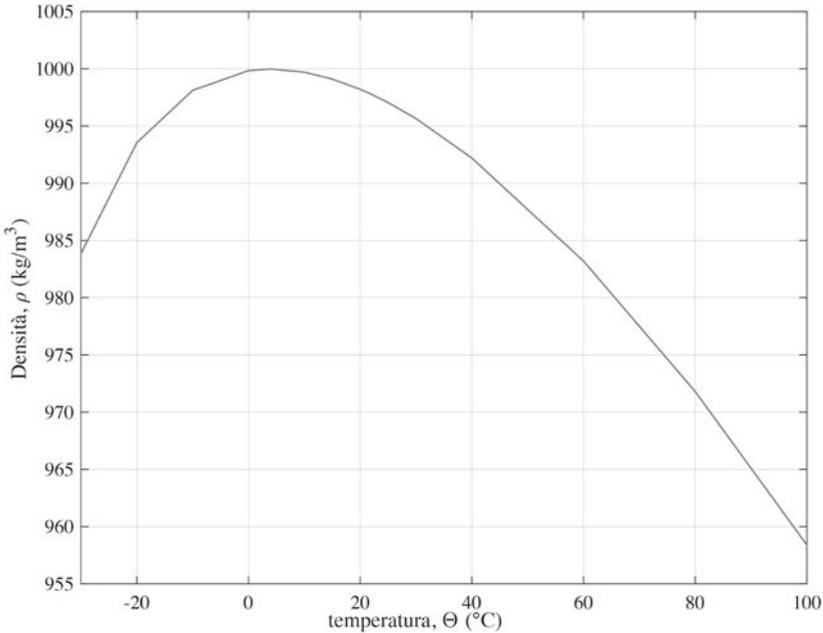


Figura 1.2: Andamento della densità dell'acqua con la temperatura a pressione atmosferica.

1.4 Condizione di aderenza e viscosità

Per meglio comprendere l'origine e le caratteristiche dello stato tensionale in una massa fluida e, in particolare, quelle degli sforzi tangenziali, è necessario discutere preliminarmente la cosiddetta *condizione di aderenza* collegata alla *viscosità*, un'altra importante proprietà dei fluidi.

Si consideri, per semplicità, un fluido caratterizzato da una velocità uniforme, u_0 , che investe una lastra piana impermeabile fissa nello spazio (Fig. 1.3).

Le osservazioni sperimentali indicano che in corrispondenza della lastra il fluido si arresta aderendovi completamente (si verifica, cioè, la cosiddetta *condizione di aderenza*). Ogni scorrimento relativo fra lastra e fluido è quindi impedito (*no-slip condition*) e si determina lo sviluppo di un gradiente di velocità in direzione normale alla lastra. In altre parole, il fluido che aderisce alla lastra frena lo strato adiacente che a sua volta frena quello successivo fino ad una distanza alla quale si ristabilisce il valore indisturbato della velocità, u_0 , e l'effetto della lastra sul campo di moto diviene trascurabile. Analogamente, se la lastra fosse in movimento, lo strato di liquido vi aderirebbe assumendo la sua stessa velocità.

Questo fenomeno, che si verifica in corrispondenza di ogni superficie di contatto fra un solido e un fluido, ovvero fra due flussi aventi differente velocità, è dovuto alla *viscosità*. La regione di fluido nella quale si verificano tali gradienti di velocità prende il nome di *strato limite*. Per convenzione, lo spessore dello strato limite è assunto pari alla distanza dalla lastra ferma alla quale la velocità assume un valore pari a $0.99 u_0$.

Per il *principio di azione e reazione*, per effetto della condizione di aderenza, il fluido esercita sulla lastra un'azione di trascinamento, una forza cioè che ha la direzione del moto del fluido.

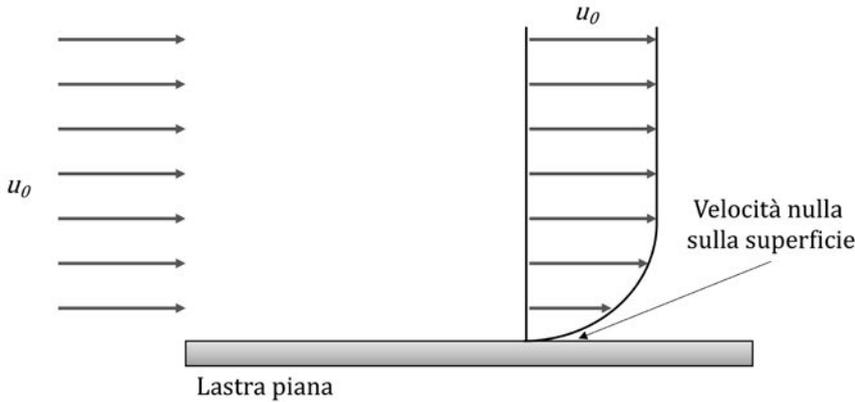


Figura 1.3: Fluido con velocità uniforme, u_0 , che investe una lastra piana impermeabile e fissa nello spazio.

Nel caso di due strati di fluido che si muovano con differente velocità, si sviluppano degli sforzi tangenziali per effetto dei quali lo strato più veloce tende a trascinare quello più lento (azione) mentre quello più lento tende a frenare quello più veloce (reazione). A seconda, quindi, che siano applicati dalle particelle più veloci a quelle più lente o da quelle più lente a quelle più veloci, gli sforzi tangenziali possono essere visti, rispettivamente, come sforzi di trascinamento o come sforzi resistenti. Secondo questo schema interpretativo, aderente alla visione di Newton che definiva la viscosità come “mancanza di scivolosità”, in un fluido in quiete (nel quale, ovviamente, non sono presenti gradienti di velocità), gli sforzi tangenziali sono nulli. In tutte le altre condizioni, invece, sono presenti sforzi tangenziali¹.

Coerente con questo fenomeno è quanto si verifica quando un solido si muove in un fluido. A parità di tutte le altre condizioni, si può infatti osservare che la resistenza opposta al moto verso il basso di una pallina di vetro cresce passando dall'aria all'acqua e da questa all'olio a dimostrazione che le caratteristiche del liquido, in particolare la sua viscosità, influenzano il moto.

Un fenomeno simile, peraltro, si verifica quando due corpi solidi a contatto fra di loro si muovono l'uno rispetto all'altro. Sulla superficie di contatto si sviluppa, infatti, una forza di attrito che ha verso opposto a quello del moto. Per spostare, ad esempio, un tavolo dalla sua posizione, facendolo strisciare sul pavimento, bisogna applicare ad esso una forza orizzontale, grande abbastanza da vincere la forza di attrito, il cui valore dipende dal coefficiente di attrito fra tavolo e pavimento.

1.4.1 Legge di Newton e misura della viscosità

Nel caso di un liquido, la misura della viscosità può effettuarsi in laboratorio utilizzando, ad esempio, un viscosimetro a cilindri coassiali, schematizzato in Fig. 1.4, detto anche *viscosimetro di Searle* (Fig. 1.5).

¹Come sarà meglio precisato nel seguito, poiché nella realtà non esistono fluidi con viscosità nulla, il *fluido perfetto* rappresenta un *ente ideale* il cui comportamento simula adeguatamente quello dei fluidi reali solo in alcuni casi particolari.

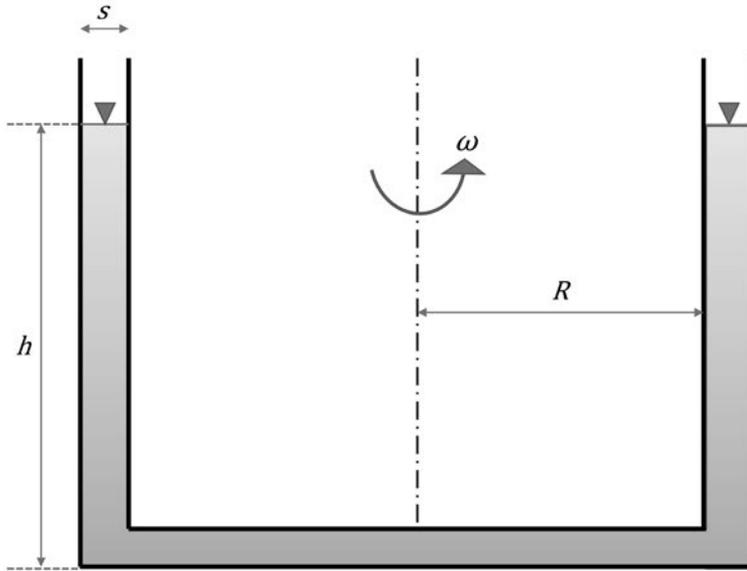


Figura 1.4: Schema di un viscosimetro a cilindri coassiali.

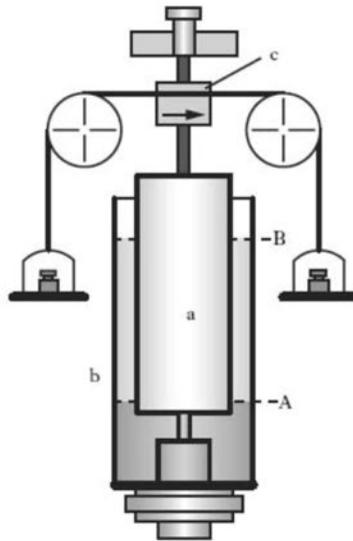


Figura 1.5: Viscosimetro di Searle (Fonte: *Treccani - enciclopedia online*).

Utilizzando questo strumento è necessario in primo luogo riempire con il liquido considerato, per un'altezza h , l'intercapedine fra i due cilindri il cui spessore, s , deve essere molto minore del raggio del cilindro interno, R . Il rispetto della condizione $s \ll R$ assicura che il

moto nell'intercapedine sia *regolare*². Si mette quindi in rotazione intorno all'asse verticale uno dei due cilindri, ad esempio quello interno, con una velocità angolare costante, ω . Trascorso un certo intervallo di tempo, per effetto degli sforzi tangenziali generati, comincerà a ruotare anche il cilindro esterno. Per bloccare tale cilindro, e quindi per contrastare la forza di trascinamento trasmessa a quest'ultimo dal liquido contenuto nell'intercapedine, è necessario applicare una forza tangenziale resistente, \mathbf{T} . In tale dispositivo, anche perché lo spessore s è piccolo, un valore rappresentativo dello sforzo tangenziale viscoso, τ_v , agente sulla superficie interna è fornito dalla relazione:

$$\tau_v = \frac{\mathbf{T}}{A} \quad (1.3)$$

dove A è la superficie laterale del cilindro interno.

Risulta sperimentalmente che, per un assegnato fluido, il valore di τ_v è direttamente proporzionale alla velocità impressa al cilindro interno, inversamente proporzionale allo spessore s dell'intercapedine e dipende dalla temperatura del fluido. Per un'assegnata temperatura, si può pertanto scrivere:

$$\tau_v = \mu \frac{\omega}{s} = \mu \dot{\omega} \quad (1.4)$$

in cui il coefficiente di proporzionalità, μ , che caratterizza il liquido, viene definito *coefficiente di viscosità dinamica* e $\dot{\omega}$ rappresenta il gradiente di velocità.

L'equazione (1.4), detta *equazione di Newton*, definisce il cosiddetto comportamento reologico dei *fluidi newtoniani* nei quali lo sforzo tangenziale viscoso è direttamente proporzionale al gradiente di velocità, $\dot{\omega}$ (Fig. 1.6). In contrapposizione, tutti gli altri fluidi sono detti *non-newtoniani*. Considerando che $\dot{\omega}$ rappresenta la variazione di velocità esistente fra il cilindro interno, che ruota con velocità ω , e quello esterno, che è fermo, se si considerano, invece, due strati di fluido contigui, ad una distanza dn fra di loro, fra i quali esista una differenza di velocità, dv , fra di essi si sviluppa uno sforzo tangenziale il cui modulo è definito dalla seguente relazione:

$$\tau_v = \mu \frac{dv}{dn} \quad (1.5)$$

equivalente all'Eq.(1.4).

Nei liquidi newtoniani la viscosità dinamica non dipende dalla pressione mentre diminuisce all'aumentare della temperatura. All'aumentare di questa, infatti, le molecole, acquistando energia, si oppongono maggiormente alla coesione intermolecolare e possono quindi muoversi più liberamente; nei gas avviene il contrario.

Sulla base delle Eqq. (1.4) e (1.5), il coefficiente di viscosità dinamico ha dimensioni $[FTL^{-2}]$; nel S.I., pertanto, μ si può esprimere in Pa·s (Pa = N/m²).

Per i liquidi, la seguente relazione consente di approssimare adeguatamente i dati sperimentali relativi alla dipendenza di μ dalla temperatura assoluta, K :

$$\mu = a10^{b/(K-c)} \quad (1.6)$$

²Come sarà chiarito nel seguito, le limitate dimensioni dell'intercapedine dove si svolge il moto favoriscono l'instaurarsi di un moto *laminare* o *regolare*.

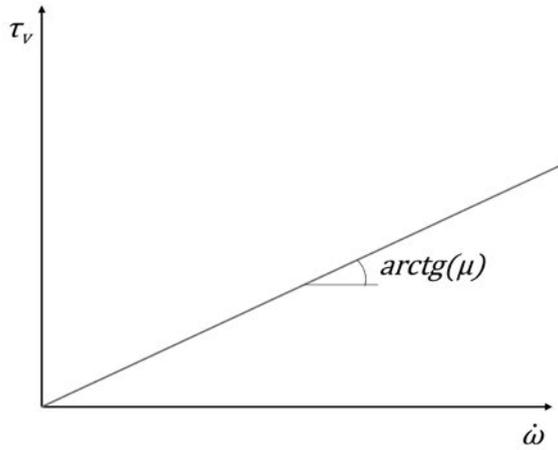


Figura 1.6: Diagramma rappresentativo del comportamento reologico dei *fluidi newtoniani*.

in cui a , b , e c sono costanti sperimentali. Per l'acqua, tali costanti assumono i seguenti valori: $a = 2.414 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $b = 247.8 \text{ K}$, $c = 140 \text{ K}$ (Fig. 1.7). Dalla Fig. 1.7, alla temperatura $\Theta = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ($= 293.15 \text{ K}$)³ per l'acqua risulta $\mu = 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

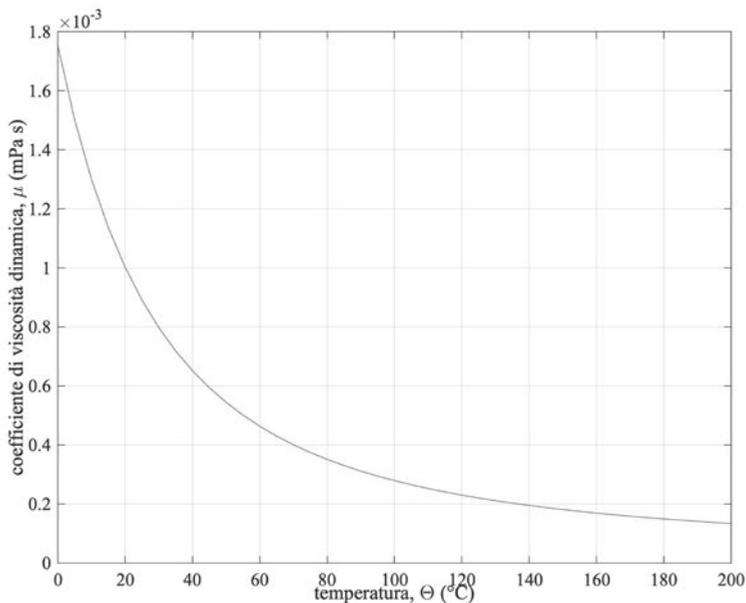


Figura 1.7: Andamento del coefficiente di viscosità dinamica, μ , dell'acqua in funzione della temperatura, Θ ($^\circ\text{C}$).

³Il simbolo K indica la temperatura (assoluta) in gradi Kelvin (K) mentre Θ quella in gradi centigradi ($^\circ\text{C}$).

I risultati sperimentali discussi evidenziano che, mentre i solidi possono resistere ad una sollecitazione tangenziale deformandosi, un liquido si deforma in maniera continua sotto l'azione di uno sforzo tangenziale, anche molto piccolo. Nei solidi elastici lo sforzo è proporzionale alla deformazione, mentre in un fluido lo sforzo è proporzionale alla velocità di deformazione. Applicando una forza tangenziale costante a un solido, esso si deforma fino a che la deformazione angolare non raggiunge un certo valore; un fluido, invece, non finisce mai di deformarsi tendendo a raggiungere una certa velocità di deformazione (Çenger et al., 2007).

A scopo esemplificativo delle differenze fra solidi e liquidi, si consideri un parallelepipedo di materiale elastico compreso fra due lastre piane parallele (Fig. 1.8). La lastra superiore sia soggetta ad una forza tangenziale \mathbf{F} mentre quella inferiore sia mantenuta ferma. Il risultato è che al parallelepipedo viene impressa una deformazione angolare β proporzionale alla forza \mathbf{F} . Nell'ipotesi che il parallelepipedo di materiale elastico aderisca perfettamente alle due lastre, che cioè non si verifichi alcuno slittamento, la sua faccia inferiore rimane ferma mentre quella superiore subisce lo stesso spostamento della lastra cui aderisce.

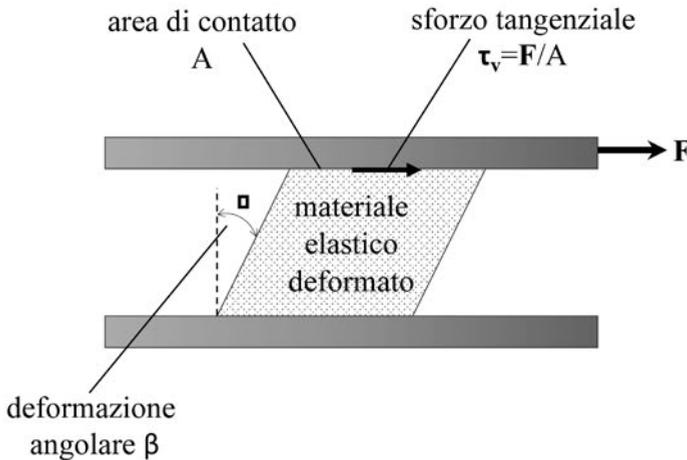


Figura 1.8: Deformazione di un parallelepipedo di materiale elastico compreso fra due lastre piane: quella inferiore ferma e quella superiore soggetta all'azione di una forza tangenziale \mathbf{F} (da Çenger et al., 2007).

Per il principio di azione e reazione, il parallelepipedo di materiale elastico esercita sulla lastra superiore un'azione, uguale e contraria a \mathbf{F} , che nasce per effetto dell'attrito. Indicando con A l'area della superficie di contatto fra il parallelepipedo di materiale elastico e la lastra superiore, la forza \mathbf{F} assume la seguente espressione:

$$\mathbf{F} = \tau_v A \quad (1.7)$$

essendo τ_v lo sforzo tangenziale viscoso.

Purché la deformazione provocata dalla sollecitazione applicata non superi il campo elastico, se

la forza viene rimossa, il blocchetto di materiale elastico ritorna nella sua configurazione iniziale. Il comportamento illustrato non dipende dal materiale costituente il blocchetto purché questo sia elastico (ad esempio, di acciaio). Se, invece, le due lastre fossero immerse in una massa d'acqua, lo strato di fluido a contatto con la lastra superiore si muoverebbe con la sua stessa velocità. Per effetto della viscosità, la velocità diminuirebbe fino ad annullarsi in corrispondenza della lastra inferiore.

1.5 Forze e sforzi in una massa fluida

Le principali forze agenti su una massa fluida sono di due tipi:

- forze di massa,
- forze di superficie.

Le *forze di massa* derivano dal fatto che la massa è immersa in un campo vettoriale dovuto ad una causa esterna. Nella maggior parte delle nostre applicazioni, la forza di massa coincide con la *forza peso* in quanto la massa è immersa nel *campo gravitazionale*.

Le *forze di superficie* sono quelle che agiscono, ad esempio, sulla superficie di un fluido o all'interfaccia fra due fluidi o fra un fluido e un solido. L'introduzione delle forze di superficie si rende spesso necessaria in quanto per lo studio dell'equilibrio, una porzione di fluido (il cosiddetto *volume di controllo*) viene estratta, con opportuni tagli, dal volume di fluido circostante. Per mantenere invariate, rispetto alla realtà, le forze agenti sul volume di controllo, è necessario sostituire il fluido circostante con le forze – le forze di superficie, appunto – che quest'ultimo esercita attraverso la superficie che delimita il volume di controllo. Le forze superficiali si possono anche inquadrare come l'azione del mondo esterno sul volume di controllo esercitata attraverso la superficie che lo delimita. Nel caso di Fig. 1.9a, ad esempio, il volume di liquido è stato diviso in due parti attraverso un sezionamento piano.

Per mantenere inalterata la situazione, in corrispondenza del taglio è quindi applicata la risultante delle forze di superficie, $\mathbf{\Pi}$, che le due parti si trasmettevano prima del taglio. Per il principio di azione e reazione, se sulla parte sinistra agisce la forza $\mathbf{\Pi}$, su quella destra agisce la forza, $-\mathbf{\Pi}$, uguale e contraria (Fig. 1.9b). La forza di superficie complessiva, $\mathbf{\Pi}$, è la risultante delle forze $d\mathbf{\Pi}$ agenti su ciascuna area infinitesima dA , con baricentro nel punto P, appartenente alla superficie di separazione (avente area A), risultando:

$$\mathbf{\Pi} = \int_A d\mathbf{\Pi} \quad (1.8)$$

La generica forza infinitesima $d\mathbf{\Pi}$ si può scomporre (Fig. 1.9c) in una componente normale, $d\Pi_n$, e in una componente tangenziale, $d\Pi_\tau$, che giace sulla superficie di separazione, tali che risulti:

$$d\mathbf{\Pi} = d\Pi_n \mathbf{n} + d\Pi_\tau \mathbf{t} \quad (1.9)$$

dove \mathbf{n} e \mathbf{t} sono i versori della normale e della tangente nel punto P. Lo sforzo normale, σ_n , e quello tangenziale, τ_n , nel punto P sono quindi definiti dalle relazioni scalari:

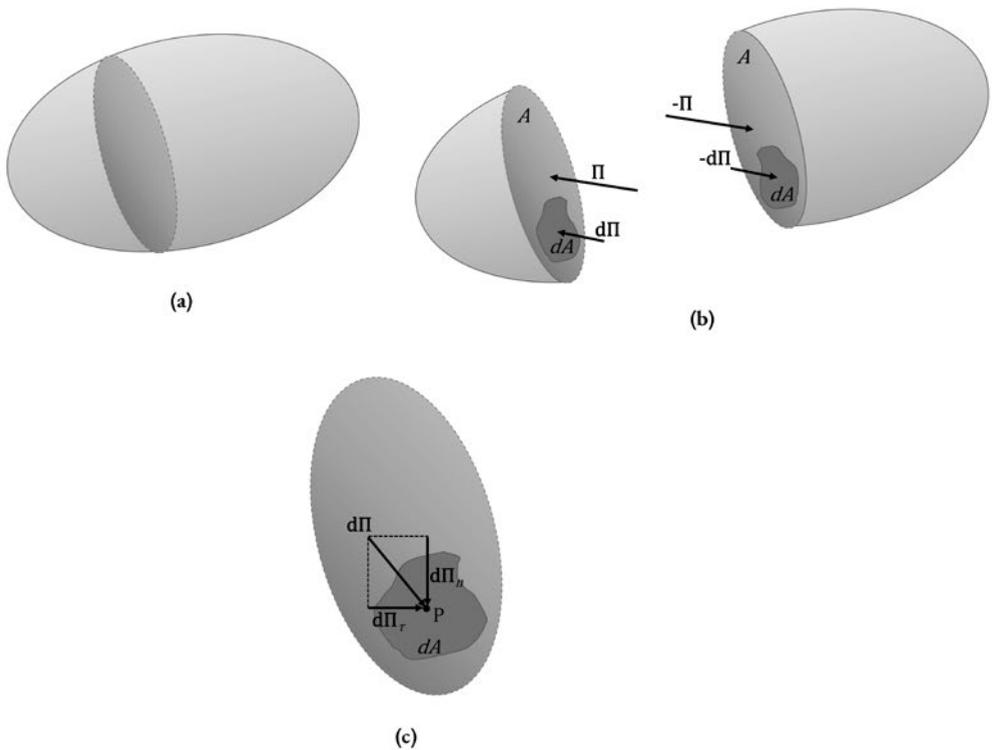


Figura 1.9: Schematizzazione dello stato tensionale all'interno di un mezzo fluido: a) volume di fluido diviso in due parti mediante sezionamento piano; b) forze di superficie in corrispondenza del sezionamento; c) scomposizione della forza di superficie in componente normale e tangenziale (modificata da *Mossa e Petrillo*, 2013).

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{d\Pi_n}{dA} \\ \tau_n &= \frac{d\Pi_\tau}{dA}\end{aligned}\quad (1.10)$$

Si può dimostrare che per la completa definizione dello stato tensionale in un punto di una massa fluida, è necessario considerare tre piani fra di loro ortogonali e appartenenti alla stella di piani passanti per il punto considerato. Tali piani sono definiti dalla direzione della normale ad essi (siano \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 e \mathbf{n}_3 i relativi versori). Per ciascuno di tali piani, si possono definire, come illustrato sopra, i relativi sforzi normale e tangenziale. I sei vettori così ottenuti definiscono completamente lo stato tensionale nel punto. In tale ambito si definisce *pressione*, p , la media aritmetica delle tre tensioni normali:

$$p = \frac{\sigma_{n,1} + \sigma_{n,2} + \sigma_{n,3}}{3}\quad (1.11)$$

Appare infine opportuno evidenziare l'incapacità da parte dei fluidi di resistere a sforzi normali di trazione. Per questo motivo, gli unici sforzi normali ammissibili sono quelli di compressione che sono quindi assunti positivi (diversamente dalla teoria del mezzo solido) e sono diretti sempre verso la superficie sulla quale agiscono.

1.6 Alcuni numeri adimensionali

Per l'analisi dei risultati di prove sperimentali e simulazioni numeriche, può essere utile valutare l'importanza delle differenti forze agenti su un *volumetto elementare* (ossia un insieme di particelle fluide).

Si consideri, per semplicità ma senza che questo comporti nessuna limitazione per i risultati che si otterranno, un cubetto di lato ℓ contenente liquido di densità ρ , viscosità μ e immerso in un campo di moto caratterizzato da una velocità v . Su tale cubetto agiscono, fra le altre, la forza di massa, quella di inerzia e quella dovuta alla viscosità.

In termini dimensionali, il modulo di tali forze è espresso dalle seguenti relazioni:

$$F_g = \rho g \ell^3\quad (1.12)$$

per la *forza peso*, ossia la forza di massa di maggiore interesse per le applicazioni che si considerano in questa sede,

$$F_i = ma = \rho \ell^3 \frac{v}{t} = \rho v^2 \ell^2\quad (1.13)$$

per la *forza di inerzia*, in cui t = tempo, e

$$F_\mu = \tau_v \ell^2 = \mu \frac{v}{\ell} \ell^2 = \mu v \ell\quad (1.14)$$

per la *forza viscosa*, una delle forze agenti sulla superficie, di area ℓ^2 , del cubetto considerato. Si consideri, in primo luogo, il rapporto fra la forza di inerzia e quella viscosa:

$$\frac{F_i}{F_\mu} = \frac{\rho v^2 \ell^2}{\mu v \ell} = \frac{\rho}{\mu} v \ell\quad (1.15)$$

Si può verificare che tale rapporto rappresenta un numero puro. Esso viene definito *numero di Reynolds* e si indica generalmente con il simbolo Re . Se, quindi, si definisce *coefficiente di viscosità cinematica*, il rapporto fra il coefficiente di viscosità dinamica e la densità e lo si indica con la lettera ν :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.16)$$

il numero di Reynolds si può scrivere come:

$$Re = \frac{v\ell}{\nu} \quad (1.17)$$

Il numero di Reynolds indica quante volte le forze di inerzia sono più grandi di quelle viscosive. Tale informazione è molto importante nello studio di molti fenomeni fisici purché si identifichino ℓ e v rispettivamente con una grandezza lineare e una velocità caratteristiche del fenomeno esaminato. Ad esempio, come sarà discusso più avanti, nella valutazione delle dissipazioni di energia in una corrente che si muova di moto uniforme in una tubazione circolare, il valore di Re consente di individuare il regime di moto purché si assuma ℓ pari al diametro interno della tubazione, D , e v pari alla velocità media di portata, V^4 .

In base alla definizione (1.16), il coefficiente di viscosità cinematica ha dimensioni $[L^2T^{-1}]$. Nel S.I., ν si può quindi esprimere in m^2/s . Per l'acqua, alla temperatura di $20^\circ C$, risultando $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, si ha $\nu = 1.006 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/s$.

Si consideri, quindi, il rapporto fra la forza di inerzia e quella peso:

$$\frac{F_i}{F_g} = \frac{\rho v^2 \ell^2}{\rho g \ell^3} = \frac{v^2}{g\ell} \quad (1.18)$$

La radice quadrata di questo rapporto viene definita *numero di Froude* e si indica generalmente con il simbolo Fr :

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g\ell}} \quad (1.19)$$

Il numero di Froude, che ci dice quante volte le forze di inerzia sono più grandi della forza peso, svolge anch'esso un ruolo importante nell'analisi di molti fenomeni fisici purché, come nel caso di Re , si identifichino ℓ e v rispettivamente con una grandezza lineare e una velocità caratteristiche del fenomeno esaminato. Ad esempio, nello studio delle correnti a pelo libero in moto permanente, il valore di Fr consente di classificare la corrente come ipercritica (*veloce*) o ipocritica (*lenta*) purché si assuma ℓ pari al tirante idrico, h , e v pari alla velocità media di portata, V .

1.7 Equazione di stato e comprimibilità

L'*equazione di stato* è la relazione che lega la densità, ρ , alla temperatura, ϑ , e alla pressione, p . Essa si può quindi esprimere nella forma:

$$\rho = f(p, \vartheta) \quad (1.20)$$

⁴La velocità media di portata verrà definita nel capitolo 3.

Si consideri un volume W che contenga la massa di fluido m . In base alla definizione di densità – Eq. (1.1) – si può scrivere:

$$m = \rho W$$

L'esperienza mostra che il volume, W , cambia se sottoposto ad una variazione di temperatura (*dilatabilità*) o di pressione (*comprimibilità*). Per il *principio di conservazione della massa*, invece, la massa contenuta non cambia per effetto di una variazione né di temperatura né di pressione ($dm = 0$). Si può pertanto scrivere:

$$dm = d(\rho W) = \rho dW + W d\rho = 0 \quad (1.21)$$

Combinando le Eq.(1.20) e (1.21), dopo alcuni passaggi, si ottiene l'espressione differenziale dell'equazione di stato:⁵

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{\varepsilon} - \alpha d\vartheta \quad (1.26)$$

in cui $\varepsilon =$ modulo di comprimibilità cubica.

Nell'ipotesi di processo isoterma ($\vartheta =$ costante) e di sollecitazione dp costante su tutto il volume considerato, con particolare riferimento ai liquidi, tenendo conto della (1.21), si può scrivere:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{\varepsilon} = -\frac{dW}{W} \quad (1.27)$$

ovvero

$$dW = -dp \frac{W}{\varepsilon} \quad (1.28)$$

la quale, detta *legge di Hooke – ut tensio (dW), sic vis (dp)* – descrive il comportamento di un mezzo elastico al variare della sollecitazione esterna. L'Eq. (1.28) indica che la diminuzione di volume, dW , dovuta ad un incremento positivo della pressione, dp , è direttamente proporzionale al volume iniziale, W , e inversamente proporzionale al modulo di comprimibilità cubica, ε .

In base alla definizione (1.27), il modulo di comprimibilità cubica ha dimensioni $[FL^{-2}]$. Nel S.I., ε si può quindi esprimere in N/m^2 .

In accordo con quanto detto, il valore di ε per i liquidi è molto elevato, dell'ordine, cioè, di 10^9

⁵Differenziando l'equazione di stato (1.20), si ottiene:

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial p} dp + \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad (1.22)$$

Esprimendo la variazione $d\rho$ rispetto al valore iniziale ρ , si può quindi scrivere:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} dp + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad (1.23)$$

Introducendo i coefficienti:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (1.24)$$

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \quad (1.25)$$

si perviene all'Eq. (1.26)

N/m^2 . Esso non dipende dalla pressione ma aumenta con la temperatura. A titolo di esempio, per l'acqua alla temperatura di 10°C risulta $\varepsilon = 2.08 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$; passando da 10°C a 30°C , inoltre, ε aumenta di circa il 10 %.

Gli elevati valori del modulo di comprimibilità cubica, ε , dei liquidi spiegano il comportamento di questi ultimi, sostanzialmente indeformabili nel campo delle pressioni che si verificano in natura e normalmente negli impianti.

Sulla base delle considerazioni sopra esposte, quindi, in condizioni isoterme, nella maggior parte delle applicazioni, l'equazione di stato per un liquido omogeneo può scriversi nella forma semplicissima:

$$\rho = \text{costante} \quad (1.29)$$

1.8 Tensione di vapore e solubilità dell'aria in acqua

Un vapore⁶ è in equilibrio con il liquido dal quale proviene quando le particelle che passano dalla fase liquida a quella gassosa (*evaporazione*) sono in numero pari a quelle che dalla fase gassosa passano a quella liquida (*condensazione*). Tale condizione di equilibrio si raggiunge quando, in presenza del liquido che lo ha generato, la pressione del vapore risulta pari alla *tensione di vapore*, p_v .

La tensione di vapore è una grandezza caratteristica della sostanza e dipende dalla temperatura. Nel caso dell'acqua, ad esempio, p_v diminuisce con la temperatura assumendo un valore pari a quello della pressione atmosferica, p_{atm} ($= 101325 \text{ Pa}$), se risulta $\Theta = 100^\circ\text{C}$ e a circa il 2% di p_{atm} ($= 2337 \text{ N/m}^2$) se $\Theta = 20^\circ\text{C}$.

Se la pressione del vapore è maggiore di p_v , aumenterà la condensazione con conseguente diminuzione della pressione. Al contrario, se la pressione risulta minore di p_v , si avrà maggiore evaporazione, il che comporta un incremento della pressione. Se, quindi, in un ambiente confinato (ad esempio all'interno di una tubazione in pressione) la pressione scende ad un valore prossimo a p_v , si verifica un fenomeno di evaporazione che comporta la formazione di sacche e bolle di vapore (fenomeno della *cavitazione*). Negli impianti idraulici tali fenomeni si verificano quando, per effetto di manovre o di un particolare andamento altimetrico della tubazione, la pressione diminuisce fino ad un valore prossimo a p_v .

La presenza delle sacche e bolle di vapore ostacola il regolare deflusso di una corrente idrica determinandone un funzionamento discontinuo e pulsante. Nelle zone sede di cavitazione, inoltre, si possono innescare fenomeni di corrosione nel caso delle tubazioni metalliche. Le bolle di vapore trascinate dalla corrente implodono quando raggiungono zone dove la pressione è maggiore. Il collasso delle bolle determina l'insorgere di sovrappressioni anche notevoli.

All'abbassamento della pressione si accompagna anche una diminuzione della solubilità dell'aria in acqua. Secondo quanto affermato dalla *legge di Henry*, infatti, la quantità di aria che può rimanere disciolta in soluzione nell'acqua diminuisce al diminuire della pressione e all'aumentare della temperatura. Alla temperatura di 20°C , ad esempio, il numero massimo di litri di aria che possono essere disciolti in un metro cubo di acqua è pari a circa 18.6 L/m^3 se la pressione assoluta⁷, p_{ass} , è di 1 bar mentre aumenta a 35 L/m^3 se la p_{ass} è pari a 2 bar. L'aria

⁶Si definisce *vapore* una sostanza aeriforme che si trovi ad una temperatura inferiore a quella critica. Si definisce *temperatura critica* il valore della temperatura al di sopra del quale una sostanza non può esistere allo stato liquido (per l'acqua la temperatura critica è pari a $373,936^\circ\text{C}$).

⁷Il concetto di *pressione assoluta* e *pressione relativa* verrà introdotto nel seguito.

rilasciata dall'acqua si presenta sotto forma di microbolle con diametri nell'ordine dei decimi di millimetro.

Per un regolare funzionamento dei circuiti idraulici è quindi necessario che la pressione risulti sempre notevolmente maggiore del valore della tensione di vapore alla temperatura di esercizio. In questo modo si eviteranno sia la formazione di sacche e bolle di vapor acqueo, e la loro successiva implosione, sia il rilascio dell'aria disciolta.

Riferimenti bibliografici

Çenger, Y.A., e Cimbala, J.M. (2007). *Meccanica dei Fluidi*, Edizione italiana a cura di G. Cozzo e C. Santoro, The McGraw-Hill Companies Inc., Milano.

Gallati, M. e Sibilla, S. (2009). *Fondamenti di Idraulica*. Carocci Editore, Roma.

Ghetti, A. (1984). *Idraulica*. Edizioni Libreria Cortina, Padova.

Mossa, M., e Petrillo, A.F. (2013). *Idraulica*. Casa Editrice Ambrosiana, Rozzano (MI).

Munson, B.R., Okiishi, T.H., Huebsch, W.W., e Rothmayer, A.P. (2020). *Meccanica dei Fluidi*, Edizione italiana a cura di E. Larcán e P. Escobar Rojo, CittàStudi Edizioni, Novara.

Pulci Doria, G. (1987). *Il Corso di Idraulica a partire dallo sviluppo storico-sociale della disciplina*. Vol. I, Cooperativa Universitaria Editrice Napoletana (CUEN), Napoli.

Scarsi, G. (1992). *Appunti di Idraulica del Corso di Ingegneria Meccanica*. Università degli Studi di Genova, Genova.

Capitolo 2

Comportamento dei fluidi in quiete

2.1 Premessa

È esperienza comune che la pressione in una massa liquida in quiete aumenti con la profondità. I sub, ad esempio, immergendosi, devono mettere in atto particolari accorgimenti – la cosiddetta “compensazione” – per proteggere i timpani dalle sempre più elevate pressioni. Quale è la causa di questo fenomeno? È evidente che il peso della colonna d’acqua sovrastante esercita un ruolo importante. Al contempo, che cosa spiega le pressioni che si esercitano, questa volta evidentemente dal basso verso l’alto, su un corpo che galleggia? Questi due fenomeni, apparentemente contraddittori, sono invece spiegati dalle equazioni che regolano il comportamento dei liquidi in quiete, ossia dell’*Idrostatica*. Per comprenderli è quindi necessario – come sempre – considerare le equazioni della Fisica e, in particolare, quelle che governano l’equilibrio statico.

2.2 Legge di Stevin

Si faccia riferimento al serbatoio aperto di Fig. 2.1 che contiene un liquido omogeneo, ossia con densità, ρ , e, quindi, peso specifico, γ , costanti (si tratta, cioè di un unico liquido incompressibile), in quiete (*condizioni idrostatiche*), separato dall’atmosfera da una superficie, detta “pelo libero”, che, come sarà dimostrato in seguito, è orizzontale. Per motivi di chiarezza, all’interno di tale volume di liquido, focalizziamo l’attenzione su due cilindretti retti infinitesimi: il cilindretto 1, orizzontale, e quello 2, verticale.

Consideriamo in primo luogo i punti B e C posti sullo stesso piano orizzontale (Fig. 2.2) e il cilindretto retto 1, avente basi infinitesime di area dA , e il cui asse orizzontale passa per tali punti. Su tale cilindretto agiscono le seguenti forze:

- la forza di massa che coincide con il peso, \mathbf{G} (diretto verticalmente verso il basso),
- le forze superficiali, esercitate dal liquido circostante, essendo nulli in condizioni idrostatiche gli sforzi tangenziali, sono:
 - $p_B \mathbf{n} dA$, agente sulla faccia sinistra e rivolta da sinistra verso destra in quanto azione del liquido circostante sul cilindretto,
 - $p_C \mathbf{n}' dA$, agente sulla faccia destra e rivolta da destra verso sinistra in quanto azione del liquido circostante sul cilindretto,

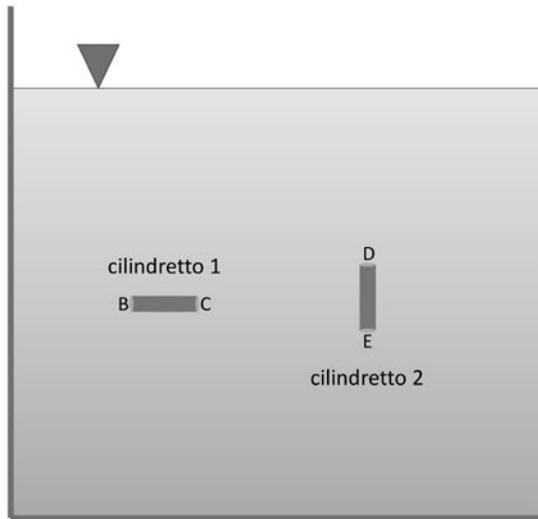


Figura 2.1: Serbatoio contenente liquido omogeneo incompressibile ($\rho = \text{costante}$) in quiete, con l'indicazione di un cilindretto orizzontale (cilindretto 1) e uno verticale (cilindretto 2).

– \mathbf{F}_l , agente sulla superficie laterale e diretta radialmente,

essendo $p_B =$ pressione agente nel punto B e $p_C =$ pressione agente nel punto C, \mathbf{n} e \mathbf{n}' i versori delle normali alle due basi.

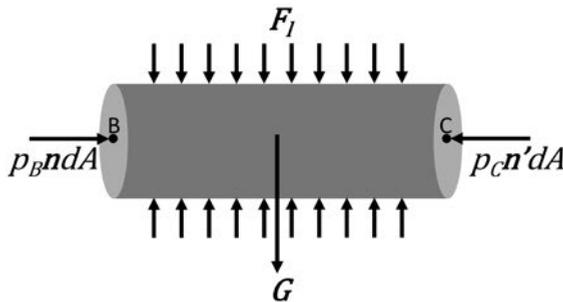


Figura 2.2: Forze agenti sul cilindretto 1.

La condizione di equilibrio statico impone che risulti:

$$p_B \mathbf{n} dA + p_C \mathbf{n}' dA + \mathbf{F}_l + \mathbf{G} = 0 \quad (2.1)$$

Proiettando la (2.1) sull'asse del cilindretto, si ottiene la seguente equazione scalare:

$$p_B dA - p_C dA = 0 \quad (2.2)$$

in quanto \mathbf{G} e \mathbf{F}_l hanno componente nulla sull'asse orizzontale.

Dalla (2.2) risulta quindi:

$$p_B = p_C \quad (2.3)$$

ossia la pressione agente su due punti di un liquido omogeneo e incompressibile in quiete appartenenti ad uno stesso piano orizzontale è la stessa. In tali condizioni, pertanto, i piani orizzontali sono *superfici isobariche*. Questo risultato spiega perché la superficie di pelo libero sia orizzontale in quanto soggetta uniformemente alla medesima pressione atmosferica.

Consideriamo, quindi, i punti D ed E all'interno del liquido posti sulla stessa verticale e il cilindretto retto 2, con basi di area elementare dA e altezza dy , il cui asse passa per D ed E (Fig. 2.3).

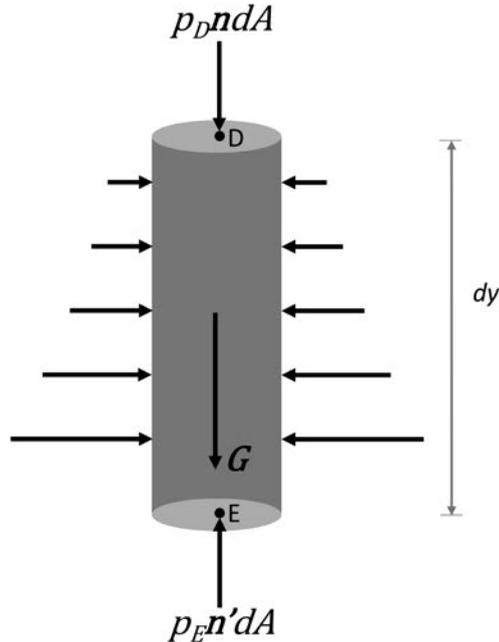


Figura 2.3: Forze agenti sul cilindretto 2.

Dall'equazione della statica, analoga alla (2.1), proiettata sull'asse verticale, risulta:

$$G + p_D dA - p_E dA = 0 \quad (2.4)$$

in quanto F_l ha componente nulla sull'asse verticale. Dalla (2.4), essendo $G = \gamma dA dy$, si ottiene:

$$p_E - p_D = \gamma dy \quad (2.5)$$

ossia

$$p_E = p_D + \gamma dy \quad (2.6)$$

la quale consente di affermare che la differenza di pressione fra due punti immersi in un liquido omogeneo e incompressibile di peso specifico γ posti sulla stessa verticale è data dal prodotto fra il peso specifico γ e il dislivello dy fra di essi.

Alla luce delle Eqq. (2.3) e (2.6), si può quindi affermare che in condizioni di quiete, in un liquido omogeneo, pesante e incompressibile la pressione varia solo con la profondità. L'Eq. (2.6) viene spesso indicata come *legge di Stevin*, da Simon Stevin, lo scienziato fiammingo che la ottenne nel XVII secolo seguendo, però, un differente procedimento.

L'Eq. (2.6) afferma, inoltre, che è possibile calcolare la pressione in un qualsiasi punto di una massa liquida in quiete purché si conosca il valore della pressione in un punto della massa stessa¹. Senza togliere generalità al procedimento, se il punto D viene posto sulla superficie di pelo libero, la pressione in esso è nota in quanto pari a quella atmosferica, p_{atm} , e l'Eq. (2.6) assume pertanto la forma:

$$p = p_{atm} + \gamma y \quad (2.7)$$

essendo y l'*affondamento* del generico punto dalla superficie di pelo libero.

In virtù della (2.7), l'andamento della pressione lungo la verticale (il cosiddetto *diagramma delle pressioni*) in una massa liquida omogenea e incompressibile in quiete è lineare (Fig. 2.4). La distanza fra il pelo libero e il fondo del serbatoio, h , viene definita *tirante idrico* e determina una pressione sul fondo $p_B = p_{atm} + \gamma h$, costante se il fondo, come quello nell'esempio di Fig. 2.4, è orizzontale. Si noti che l'area del diagramma delle pressioni di Fig. 2.4 è pari a $A_{dp} = 1/2 \gamma h^2$.

Nella pratica, si fa spesso riferimento alla differenza fra la pressione assoluta p e quella atmosferica. Tale differenza $p - p_{atm}$ viene definita *pressione relativa*; la superficie di pelo libero è quindi soggetta ad una pressione relativa nulla. L'uso della pressione relativa è talmente diffuso che per pressione si intende, salvo diversa specificazione, proprio la pressione relativa e pertanto si scrive:

$$p = p_{ass} - p_{atm} \quad (2.8)$$

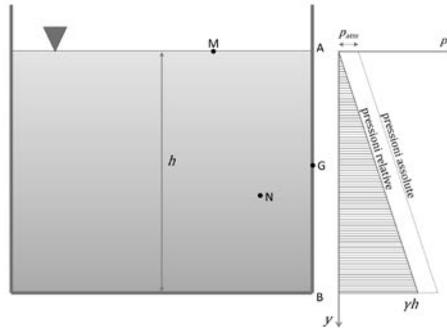


Figura 2.4: Diagramma delle pressioni assolute e relative lungo la parete verticale di un serbatoio contenente liquido omogeneo e incompressibile in quiete.

Approfondendo il significato di h si perviene ad una differente espressione della legge di Stevin. Considerando nella massa liquida in quiete due punti, M, sul pelo libero, e N, ad una generica distanza dal fondo (Fig. 2.5), si può scrivere:

¹Questo risultato deriva dal fatto che, in un approccio più generale, la pressione risulta la soluzione di un'equazione differenziale il cui integrale generale è definito a meno di una costante.

$$p_N = p_M + \gamma y_N = p_M + \gamma(h - z_N) \quad (2.9)$$

essendo z_N la quota geodetica del punto N misurata a partire dal fondo orizzontale del serbatoio rispetto al quale si misura anche h .

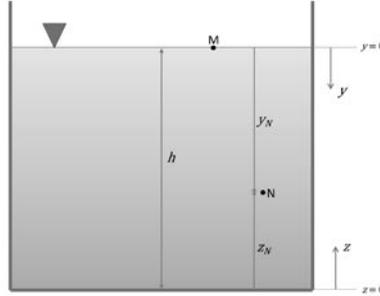


Figura 2.5: Quota geodetica, z_N , affondamento rispetto al pelo libero del punto N, y_N , e tirante idrico, h .

Essendo, quindi, $p_M = 0$, si può scrivere:

$$z_N + \frac{p_N}{\gamma} = h \quad (2.10)$$

in cui p_N/γ , avente le dimensioni di una lunghezza, è definita *altezza piezometrica*. La (2.10), valida in tutti i punti della massa liquida, consente di affermare che “in tutti i punti di un liquido omogeneo e incompressibile in quiete, soggetto unicamente alla forza peso (il cosiddetto *liquido pesante*), la somma della quota geodetica e dell’altezza piezometrica è pari al tirante idrico h ”; la grandezza $h = z + p/\gamma$ viene definita *quota piezometrica*.

Si consideri la parete piana di traccia AB di Fig. 2.4 e si ipotizzi che essa abbia spessore in direzione ortogonale al foglio costante e pari a b . Si definisce *spinta sulla parete piana*, la risultante delle forze di superficie esercitate dal fluido di peso specifico, γ , sulla parete piana di area $A = h \cdot b$:

$$\mathbf{S} = \int_A \mathbf{p} dA = \mathbf{n} \int_A p dA \quad (2.11)$$

dove la spinta, \mathbf{S} , è un vettore diretto normalmente alla superficie A (\mathbf{n} è il versore della normale alla parete). È evidente che risulta:

$$\mathbf{S} = -\mathbf{\Pi} \quad (2.12)$$

essendo $\mathbf{\Pi}$ l’azione che il mondo esterno esercita sul volume di liquido attraverso la parete piana di traccia AB.

Indicando con p_G la pressione esercitata dal fluido sul baricentro geometrico G della parete e con h_G l’affondamento di questo, si può dimostrare che il modulo del vettore \mathbf{S} assume l’espressione:

$$S = \int_A p dA = p_G A = \gamma y_G A = \gamma \frac{h}{2} A = \gamma \frac{h^2}{2} b = A_{dp} b \quad (2.13)$$

cioè il modulo della spinta, S , è pari al prodotto tra la pressione al baricentro geometrico della parete e l'area della parete stessa. Nel caso specifico di Fig. 2.4, tale valore coincide con il prodotto tra l'area del diagramma delle pressioni, A_{dp} , e lo spessore della parete b .

Consideriamo, a titolo di esempio, due semplici applicazioni della legge di Stevin.

La prima applicazione riguarda l'andamento in condizioni statiche della superficie di separazione fra due liquidi, di peso specifico γ_1 e γ_2 , non miscibili fra loro. Si assuma per tale superficie l'andamento generico ipotizzato in Fig. 2.6a; a tale superficie appartengano i generici punti V e W fra i quali esiste un dislivello Δy . Si considerino, quindi, il punto V' (giacente sullo stesso piano orizzontale cui appartiene V) e quello W' (posto sullo stesso piano orizzontale di W). Applicando la legge di Stevin, si può scrivere:

$$p_W = p_{V'} + \gamma_1 \Delta y \quad (2.14)$$

e

$$p_{W'} = p_V + \gamma_2 \Delta y \quad (2.15)$$

Poichè però risulta $p_W = p_{W'}$ (in quanto per costruzione questi punti appartengono allo stesso piano orizzontale), si può scrivere:

$$p_{V'} + \gamma_1 \Delta y = p_V + \gamma_2 \Delta y \quad (2.16)$$

Essendo $p_V = p_{V'}$ e $\gamma_1 \neq \gamma_2$, tale relazione può essere soddisfatta solo se $\Delta y = 0$ e, quindi, se i punti V e W giacciono sullo stesso piano orizzontale (Fig. 2.6b). Si può pertanto affermare che in condizioni statiche la superficie di separazione tra due liquidi è orizzontale.

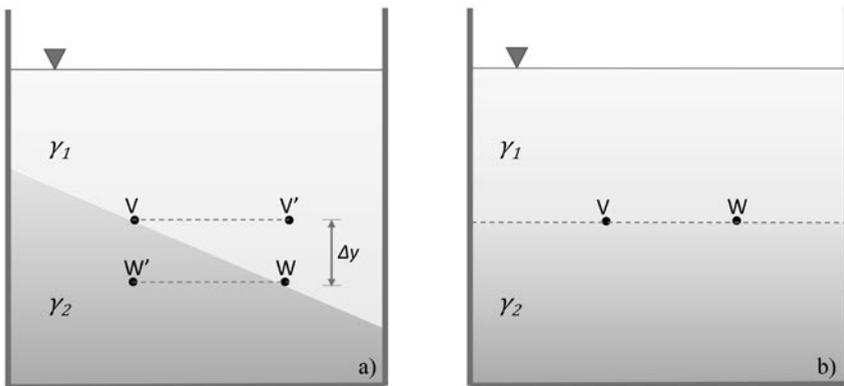


Figura 2.6: Serbatoio contenente due liquidi (non miscibili fra di loro) di peso specifico γ_1 e γ_2 : a) ipotetico andamento della superficie di separazione fra i due liquidi; b) reale andamento della superficie di separazione.

La seconda applicazione riguarda il celebre esperimento della *botte di Pascal* (Fig. 2.7). Come è noto, con tale esperimento Pascal dimostrò che, indipendentemente dal diametro del

tubicino collegato superiormente alla botte, la pressione in tutti i punti della botte aumenta in dipendenza unicamente del livello raggiunto dall'acqua nel tubicino stesso. Tale risultato, che si spiega in base alla legge di Stevin, all'epoca di Pascal non era accettato. Si riteneva, infatti, che la pressione dipendesse dalle dimensioni del volume occupato dal liquido sovrastante.



Figura 2.7: Esperimento della *botte di Pascal* (Fonte: wikipedia.org).

2.3 Unità di misura della pressione

Nel S.I. l'unità di misura della pressione è il Pascal che, come già evidenziato nel capitolo 1, è il rapporto tra l'unità di misura della forza (il Newton, N, nel S.I.) e quella della superficie (che è il metro quadrato, m^2): $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/m^2$. Oltre al Pascal, le più comuni unità di misura utilizzate nella tecnica sono:

- il bar ($1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$),
- l'atmosfera (atm), che è la pressione esercitata da una colonna di aria a livello del mare ($1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} = 1.01 \text{ bar}$).

2.4 Strumenti di misura della pressione

Di seguito si esaminano il principio di funzionamento e le caratteristiche di alcuni strumenti di misura della pressione. Alcuni di essi, ad esempio i *manometri a equilibrio di colonne di fluido* non sono più utilizzati nella pratica perché necessitano di una lettura *in loco* in quanto il segnale in uscita non è rappresentato da una grandezza di tipo elettrico. Tuttavia, oltre all'interesse storico, essi risultano molto importanti dal punto di vista didattico perché rendono visibili alcune delle proprietà dei liquidi in quiete e non solo², come si vedrà nel seguito quando si esaminerà la distribuzione della pressione in una corrente. Altri strumenti *classici*, quali i manometri a tubo di Bourdon, pur presentando la stessa limitazione, sono invece ancora largamente impiegati per l'immediatezza di installazione e lettura.

²Su questo aspetto si tornerà diffusamente nel capitolo dedicato alle *correnti gradualmente variate*.

2.4.1 Il piezometro

Il piezometro consiste in un tubicino di piccolo diametro, quasi sempre trasparente, che viene installato al fine di individuare il valore della quota piezometrica nel contenitore (serbatoio, condotta,...). Precisamente, un'estremità del piezometro è collegata al liquido mentre l'altra può essere a contatto con l'aria a pressione atmosferica.

Un esempio di tale strumento è riportato in Fig. 2.8: nei quattro piezometri installati il livello del liquido raggiunge la stessa quota, quella del pelo libero nel serbatoio. Ciò rappresenta una conferma sperimentale della validità della legge di Stevin.

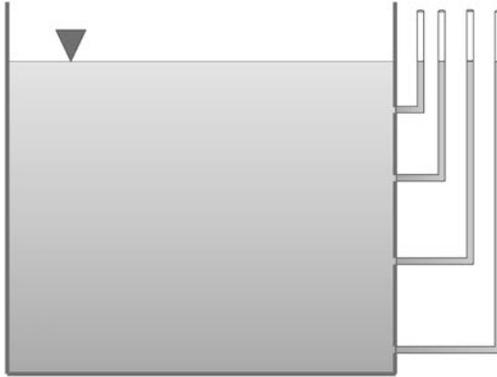


Figura 2.8: Impiego di piezometri per la misura della quota piezometrica. Evidenza dell'unicità della quota piezometrica in una massa liquida in quiete.

2.4.2 Il manometro a U

Consideriamo un tubo a U (Fig. 2.9), in genere trasparente, con un'estremità collegata al contenitore del fluido di cui si vuole misurare la pressione e l'altra a contatto con l'aria alla pressione atmosferica. Il tubo può essere riempito anche con un liquido diverso (mercurio, ad esempio, se le pressioni sono elevate). La differenza di livello tra i due menischi, δ , permette di calcolare la pressione all'interno del contenitore.

2.4.3 Trasduttori di pressione

Si definisce *trasduttore di pressione* un dispositivo di misura che ha come input un segnale di pressione e come output una grandezza ad esso legata da una legge fisica. Se l'output è di natura meccanica, il trasduttore è definito meccanico; se, invece, l'output è di natura elettrica, viene definito elettrico. Entrambi i trasduttori sfruttano la deflessione o deformazione causata dalla pressione su un elemento elastico sensibile. Nel caso dei *trasduttori meccanici* la deformazione elastica dell'elemento sensibile genera un segnale di natura meccanica (per esempio una rotazione angolare). Nel caso, invece, dei *trasduttori elettrici* la deformazione elastica dell'elemento sensibile genera un segnale in un circuito elettrico. I *trasduttori meccanici* sono strumenti di

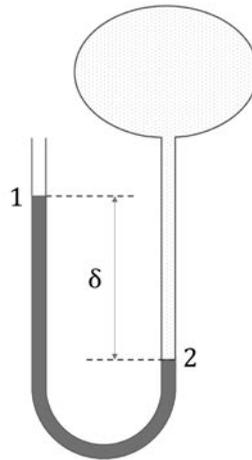


Figura 2.9: Schema di un manometro a U.

misura a lettura diretta, mentre quelli *elettrici* sono impiegati anche per la lettura a distanza in quanto il segnale elettrico può essere inviato ad un visualizzatore posto a distanza.

Il manometro a tubo di Bourdon

Il manometro a tubo di Bourdon (Fig. 2.10) si chiama così in onore del suo inventore, l'ingegnere francese Eugène Bourdon che l'inventò nel XIX secolo. Esso consiste in un tubo metallico cavo a sezione ellittica piegato ad uncino: un'estremità del tubo è chiusa mentre l'altra è aperta. Dall'estremità aperta entra il fluido, del quale si vuole misurare la pressione, e lo deforma. La deformazione viene amplificata con un sistema di leve che comanda un indice rotante su una scala graduata.

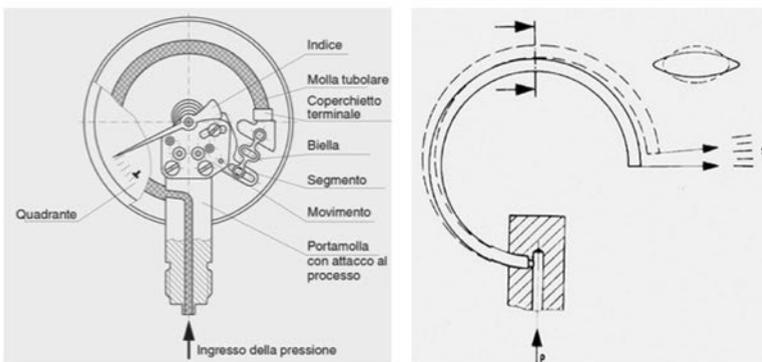


Figura 2.10: Il manometro a tubo di Bourdon (fonte: blog.wika.it).

Sensori di pressione

Nei sensori di pressione, come quello di Fig. 2.11, vi è un elemento elastico, per esempio una membrana (o diaframma), che si deforma per effetto della pressione applicata. Tale deformazio-

ne genera nel circuito elettrico collegato una variazione di resistenza. Il compito dell'elemento elastico è pertanto quello di convertire la pressione da misurare in una deformazione nel modo più riproducibile e lineare possibile. Molte delle caratteristiche del trasduttore di pressione vengono definite dalla scelta opportuna del materiale e della struttura dell'elemento elastico. I sensori di pressione a membrana possono misurare pressioni sia relative sia assolute.

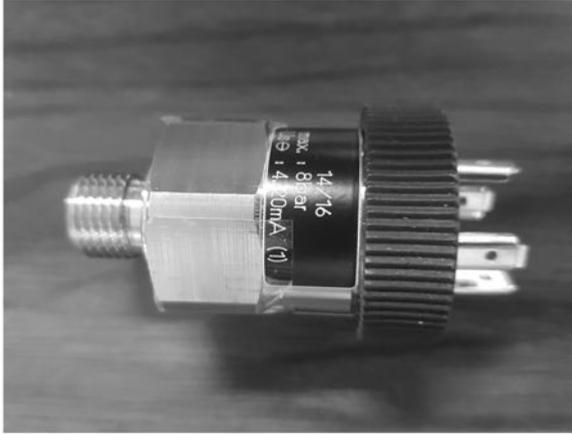


Figura 2.11: Un sensore di pressione in uso presso il *Laboratorio di Ingegneria delle Acque* dell'Università degli Studi di Perugia.

I *trasduttori di pressione piezoresistivi* sono anche detti trasduttori di pressione ad estensimetro con ponte di Wheatstone (Fig. 2.12). La membrana del trasduttore è infatti collegata a degli estensimetri cablati in una configurazione a ponte di Wheatstone. La membrana si flette per effetto della pressione e tale flessione della membrana porta ad una deformazione degli estensimetri e quindi ad una variazione della resistenza elettrica del ponte di Wheatstone, proporzionale alla pressione.

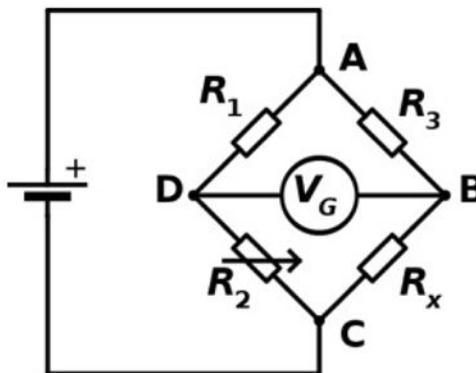


Figura 2.12: Schema del ponte di Wheatstone con indicazione delle resistenze, R_i .

La configurazione a ponte di Wheatstone viene utilizzata da una parte per aumentare la sensibilità del trasduttore e dall'altra per compensare e ridurre gli effetti di deriva termica che tali sensori possono presentare a causa della presenza degli elementi piezoresistivi. Il circuito così configurato, dunque, consente la misura della variazione di resistenza, in corrispondenza

della quale si verifica una variazione della tensione V_G . Quest'ultima variazione costituisce di fatto il segnale in uscita dal sensore, che viene dunque misurato in Volt (V) e inviato ad un sistema di controllo. L'eventuale aggiunta di un ulteriore specifico circuito permette, inoltre, di convertire il segnale in uscita in un segnale di corrente, misurato tipicamente in milli Ampere (mA).

Riferimenti bibliografici

Cascetta, F. (2003). *Sistemi di telecontrollo di reti di pubblica utilità–Reti Idriche*. Edizioni Franco Angeli, Milano.

Citrini, D., Nosedà, G. (2009). *Idraulica*. Casa Editrice Ambrosiana, Milano.

Pulci Doria G. (1992). *Metodologie moderne di misure idrauliche e idrodinamiche*. Cooperativa Universitaria Editrice Napoli (CUEN), Napoli.

Rossi, G. (2010). *Misure meccaniche e termiche. Basi teoriche e principali sensori e strumenti*. Carocci Editore, Roma.

Esercizi proposti

Esercizio 2.1

Il recipiente aperto di Fig. 2.13 contiene uno strato di acqua di altezza h . Si determinino la pressione relativa sul fondo del recipiente, p_F , la pressione relativa in corrispondenza del punto A, p_A , e il diagramma delle pressioni relative, allorché risulti $h = 1.5$ m e per il peso specifico dell'acqua, γ_W , si assuma il valore 9810 N/m³.

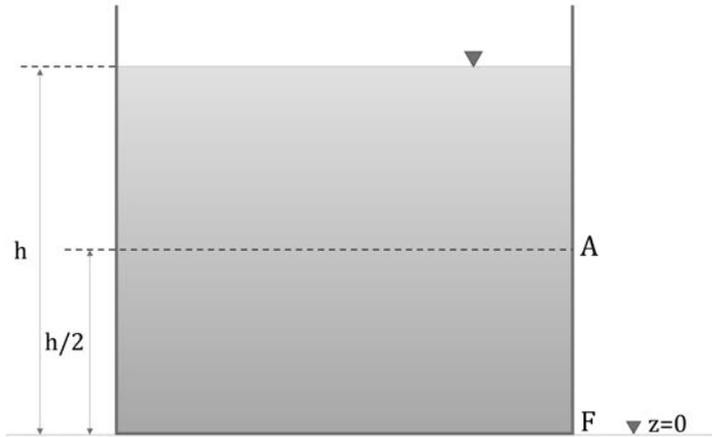


Figura 2.13: Serbatoio a pelo libero contenente uno strato di acqua di altezza h .

Esercizio 2.2

Tutti i recipienti di Fig. 2.14 contengono uno strato di acqua di altezza h . Si calcoli la pressione agente sul fondo di ciascuno di essi assumendo $h = 0.5$ m e $\gamma_w = 9810$ N/m³.



Figura 2.14: Recipienti di differente forma contenenti uno strato di acqua, h .

Esercizio 2.3

Si calcoli la pressione nel punto 3 dell'acqua contenuta nel recipiente chiuso di Fig. 2.15 utilizzando la lettura δ al manometro ad U nel quale è impiegato mercurio quale liquido manometrico. Nei calcoli si assuma $\Delta = 2$ m, $\delta = 0.2$ m, $\gamma_W = 9810$ N/m³ e il valore 133000 N/m³ per il peso specifico del mercurio, γ_m .

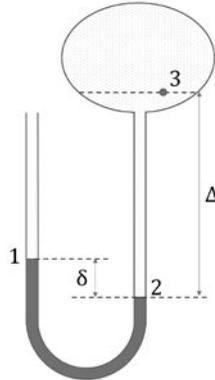


Figura 2.15: Manometro ad U con mercurio quale liquido manometrico.

Esercizio 2.4

Il recipiente chiuso di Fig. 2.16 contiene, a partire dal basso, uno strato di acqua di altezza $2h$, uno di olio di altezza h e uno di aria in pressione di altezza h . In corrispondenza del fondo è installato un manometro metallico M.

Si determinino la pressione dell'aria, il diagramma delle pressioni sulla parete verticale del serbatoio, e il modulo, S , della spinta agente sulla parete ABCD.

Nei calcolo si assuma: $h = 1$ m, che il manometro metallico indichi una pressione $p_M = 1$ bar, che la parete ABCD abbia sviluppo pari a 1 m nella direzione normale al disegno, $\gamma_W = 9810$ N/m³ e il valore 8950 N/m³ per il peso specifico dell'olio, γ_o .

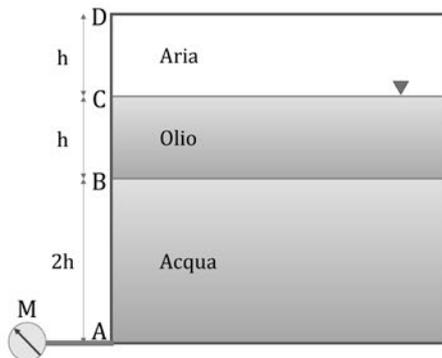


Figura 2.16: Recipiente chiuso contenente fluidi in quiete di differenti caratteristiche.

Esercizio 2.5

Nel serbatoio chiuso di Fig. 2.17 è presente uno strato di olio ($\gamma_o = 7950 \text{ N/m}^3$) e uno di acqua ($\gamma_W = 9810 \text{ N/m}^3$), entrambi di altezza h . Il manometro metallico M , posto sulla superficie di separazione tra acqua e olio, indichi un valore della pressione relativa $p_M = 0$.

Assumendo $h = 0.5 \text{ m}$ e uno spessore unitario per la parete verticale di traccia AB , si calcoli la pressione nei punti A e B , il diagramma delle pressioni relative agenti sulla parete AB e la spinta agente su di questa.

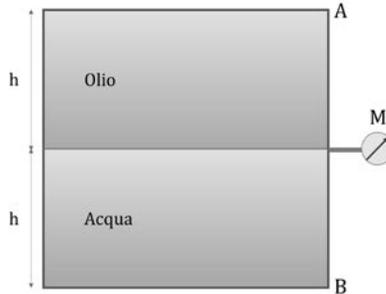


Figura 2.17: Recipiente chiuso contenente liquidi in quiete di differenti caratteristiche.

Capitolo 3

Cenni di cinematica e equazioni delle correnti

3.1 Schematizzazione del campo di moto

In una massa fluida di densità ρ , si segua nel suo moto nel tempo una particella fluida, la cui massa si immagini concentrata nel baricentro P . Si definisce *traiettoria* il luogo dei punti occupati nel tempo dalla particella fluida considerata. Nella Fig. 3.1a, a titolo di esempio, $P(t)$ rappresenta la posizione occupata dalla particella al tempo t mentre $P'(t')$ quella al tempo t' ; \mathbf{v} e \mathbf{v}' siano le rispettive velocità.

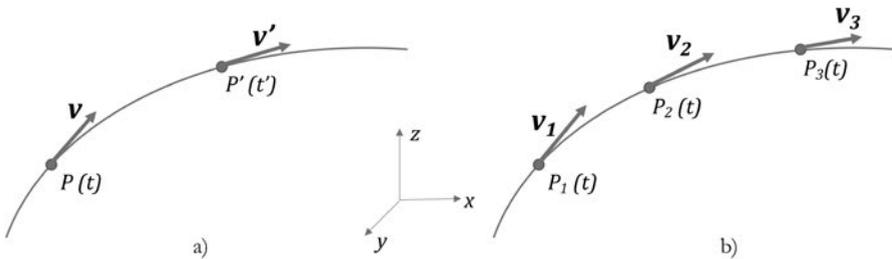


Figura 3.1: Schematizzazione del campo di moto: a) traiettoria di una particella; b) linea di flusso.

Si consideri, quindi, la curva i cui punti rappresentino la posizione occupata da differenti particelle fluide, indicate come P_1 , P_2 e P_3 in Fig. 3.1b, nel generico istante t ; \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 siano le rispettive velocità tangenti alla curva. Tale curva viene definita *linea di flusso*.

Nella massa fluida considerata si costruisca, quindi, una linea chiusa qualsiasi, di perimetro dC infinitesimo, che non sia una linea di flusso, e che racchiuda un'area infinitesima dA . Si considerino tutte le linee di flusso che in un istante t passano per i punti di dC . La superficie che delimita il volume di fluido racchiuso da tali linee di flusso è per costruzione impermeabile. In tutti i suoi punti, infatti, il vettore velocità è tangente e quindi non si verifica alcuno scambio di massa con l'esterno se non attraverso le due superfici di base. Questo volume di fluido si definisce *filetto fluido* e costituisce, in sostanza, un *tubo di flusso elementare*.

Prima di esaminare i meccanismi di scambio di massa e di energia fra un determinato volume

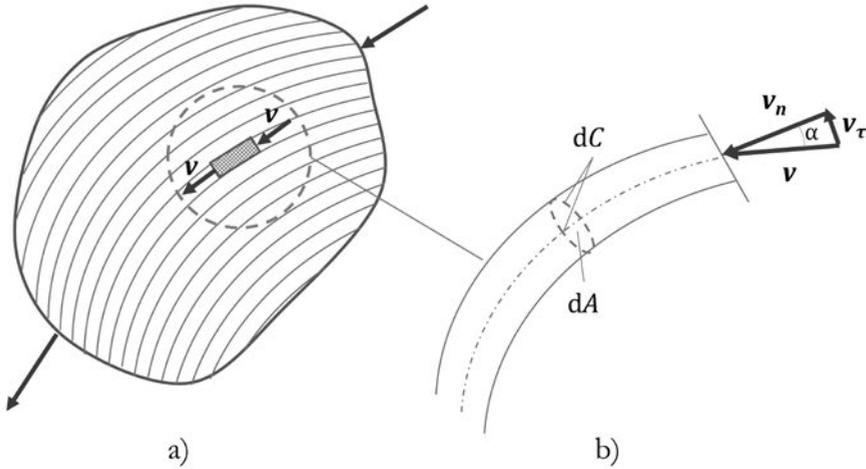


Figura 3.2: Schematizzazione del campo di moto: a) massa fluida nella quale è evidenziato un filetto fluido; b) particolare di un generico filetto fluido.

di fluido e l'esterno, è opportuno chiarire l'approccio che verrà seguito per la schematizzazione del campo di moto.

In dipendenza della notevole complessità delle traiettorie delle singole particelle e del fatto che esse, se il fluido è omogeneo, risultano indistinguibili le une dalle altre, non è possibile – ma nella maggior parte dei casi nemmeno necessario – seguirle tutte nel loro moto (*approccio lagrangiano*). Più semplice – e al tempo stesso efficace – risulta, invece, considerare il volume di fluido di interesse fisso nello spazio (il cosiddetto *volume di controllo*), e determinare il valore che in tutti i suoi punti assume il vettore velocità (*approccio euleriano*).

Nell'approccio euleriano, quindi, le funzioni incognite risultano:

$$\begin{aligned} u &= f_1(x, y, z, t) \\ v &= f_2(x, y, z, t) \\ w &= f_3(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

in cui u , v e w rappresentano le componenti di \mathbf{v} secondo rispettivamente gli assi x , y e z . Tali equazioni definiscono il cosiddetto *campo di moto* con le componenti u , v e w funzione sia della posizione – attraverso le sue coordinate x , y e z – sia del tempo, t . In tal caso, quando cioè le grandezze dipendono dal tempo, si parla di *moto vario*.

Qualora, invece, sia possibile scrivere:

$$\begin{aligned} u &= f'_1(x, y, z) \\ v &= f'_2(x, y, z) \\ w &= f'_3(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.2)$$

quando cioè le grandezze non dipendono dal tempo, si parla di *moto permanente* o *stazionario*.

Una volta note le velocità, utilizzando adeguate relazioni (in particolare, la *regola di derivazione euleriana*), si possono ricavare anche le altre grandezze (ad esempio, le accelerazioni e, quindi, le forze).

Quale ulteriore commento sulle differenze fra l'approccio lagrangiano e quello euleriano, appare di interesse sottolineare che le *traiettorie* e le *linee di flusso* ne rappresentano un'emblematica sintesi delle rispettive peculiarità. Si può infatti affermare, semplificando, che le traiettorie sintetizzano l'interesse per le *vicende* di specifiche singole particelle mentre le linee di flusso quello per selezionati punti appartenenti ad un volume di controllo.

3.2 Meccanismi di scambio di massa e definizione di portata

Si consideri una massa fluida (Fig. 3.2a), di densità ρ , nella quale sono evidenziati i filetti fluidi in essa presenti. Si estragga, quindi, un generico filetto fluido (Fig. 3.2b) avente area trasversale pari a dA . Si supponga che l'ingresso di massa nel filetto fluido avvenga attraverso la base superiore in corrispondenza della quale la velocità assume il valore \mathbf{v} . Di tale velocità \mathbf{v} , però, solo la componente normale alla sezione trasversale del filetto fluido, v_n , è responsabile dell'ingresso di massa; al contrario, la componente tangenziale, v_τ , è a tale scopo inefficace. Nel generico intervallo di tempo dt , la massa che entra, dm , è espressa quindi dalla seguente relazione:

$$dm = \rho v_n dA dt \quad (3.3)$$

Si definisce *portata massica elementare* (elementare perché riferita al filetto fluido), la grandezza:

$$d\dot{m} = \rho v_n dA \quad (3.4)$$

che rappresenta la massa che defluisce attraverso la sezione dA nell'unità di tempo. In molte applicazioni dell'Idraulica, è utile considerare un insieme di filetti fluidi (Fig. 3.3) la cui complessiva sezione trasversale A è definita dalla somma delle aree elementari:

$$A = \int_A dA \quad (3.5)$$

Tale insieme di filetti fluidi si definisce *corrente fluida* o, semplicemente, *corrente*. Per effetto di tale definizione, una corrente costituisce un *tubo di flusso di sezione finita*.

Per una corrente, la portata massica, \dot{m} , scambiata con l'esterno (sempre unicamente attraverso le basi), è definita dalla seguente relazione, concettualmente analoga all'Eq.(3.4):

$$\dot{m} = \int_A \rho v_n dA \quad (3.6)$$

Nei processi di moto in cui il fluido, omogeneo, si possa considerare anche incompressibile (quindi nella maggior parte delle applicazioni che coinvolgono correnti di liquidi), si può scrivere:

$$\dot{m} = \rho \int_A v_n dA = \rho Q \quad (3.7)$$

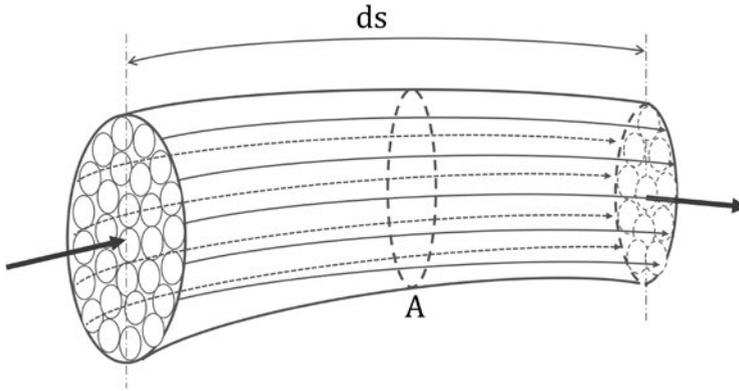


Figura 3.3: Tronco di corrente quale insieme di filetti fluidi.

nella quale la grandezza:

$$Q = \int_A v_n dA \quad (3.8)$$

si definisce *portata volumetrica* o, semplicemente, *portata*. È evidente che tale definizione di portata è congruente con quella, più intuitiva, di volume di fluido che defluisce nell'unità di tempo:

$$Q = \frac{W}{\Delta t} \quad (3.9)$$

in cui W rappresenta il volume complessivamente defluito nell'intervallo di tempo Δt . Sulla base delle definizioni sopra riportate, nel S.I. le dimensioni della portata massica, \dot{m} , sono $[M/T]$ mentre quelle della portata volumetrica, Q , sono $[L^3/T]$. Le unità di misura più appropriate per Q dipendono, ovviamente, dai valori in gioco (le più diffuse unità di misura sono il m^3/s e il L/s).

Un utile riferimento è infine costituito dalla cosiddetta *velocità media di portata* o, semplicemente, *velocità media*, V , definita dalla relazione:

$$V = \frac{\int_A v_n dA}{A} = \frac{Q}{A} \quad (3.10)$$

A proposito del significato fisico della velocità media V , è opportuno precisare che essa non rappresenta la velocità di una specifica particella ed è pertanto utile essenzialmente per valutazioni globali. In analogia con la portata Q , la velocità media si può esprimere in m/s .

3.3 Distribuzione delle pressioni in una corrente e correnti gradualmente variate

La conoscenza della distribuzione della pressione nei punti interni di una corrente può risultare importante per esaminare nel dettaglio le caratteristiche dello stato tensionale, cosa che l'approccio più globale basato sulle correnti ovviamente non permette. In questa sede, in

particolare, si vuole mettere in evidenza un'importante proprietà di un tipo, peraltro molto frequente, di correnti, quelle cioè che saranno di seguito definite *gradualmente variate*. Per illustrare tale proprietà, privilegiando un approccio più intuitivo rispetto ad una trattazione, senz'altro più rigorosa, di carattere analitico¹, si immagini di eseguire una serie di misure di pressione utilizzando dei piezometri. A tale scopo si considerino tre tronchetti di tubazione circolare di differente forma: rettilinea (Fig. 3.4a), concava (Fig. 3.4b) e convessa (Fig. 3.4c). In tutti e tre tali tronchetti si installino, quindi, due piezometri in due punti qualsiasi del contorno di una sezione trasversale. Precisamente, nei punti A e B del tronchetto rettilineo (Fig. 3.4a), in quelli A' e B' del tronchetto concavo (Fig. 3.4b) e in quelli A'' e B'' del tronchetto convesso (Fig. 3.4c). Si potrà così osservare che i menischi raggiungono la stessa quota nei due piezometri installati sul tronchetto rettilineo (Fig. 3.4a). Questo risultato dimostra che se i filetti fluidi sono rettilinei e paralleli, in tutti i punti di ciascuna sezione trasversale la quota piezometrica assume lo stesso valore, h , e la pressione ha un andamento lineare (cioè come quello previsto dalla legge di Stevin). In questo tipo di correnti, che si definiscono *gradualmente variate*², quindi, il piano orizzontale che passa per i menischi dei due piezometri presenti in A e in B assume un significato analogo a quello del pelo libero di un serbatoio aperto contenente liquido omogeneo, incompressibile e in quiete. Nel serbatoio, in accordo con la legge di Stevin, la quota piezometrica assume lo stesso valore in tutti i punti, come illustrato nella Fig. 3.5 – la Fig. 2.8 del capitolo 2 – che qui si ripropone per motivi di chiarezza. Al contrario, nelle correnti gradualmente variate ciò avviene per tutti i punti di una determinata sezione. È chiaro altresì che la quota piezometrica assume un valore differente nelle diverse sezioni. In ciascuna sezione di una corrente gradualmente variata la distribuzione delle quote piezometriche può pertanto essere correttamente definita nel suo insieme attraverso un unico valore della quota piezometrica.

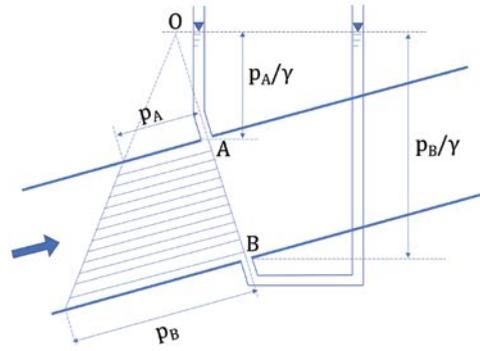
I menischi raggiungono invece quote diverse nei piezometri installati nei tronchetti concavo e convesso (Figg. 3.4b e 3.4c). In particolare, nel tronchetto concavo il menisco nel piezometro installato nel punto A' si trova ad una quota maggiore di quella nel piezometro B' (Fig. 3.4b). Situazione opposta si verifica nel tronchetto convesso nel quale il menisco nel piezometro installato nel punto A'' raggiunge una quota minore di quella nel piezometro B'' (Fig. 3.4c). Si può inoltre dimostrare che, a parità di raggio di curvatura r (misurato lungo la normale \mathbf{n} ai filetti fluidi ed orientata verso il centro di curvatura), in entrambi i casi la differenza fra le quote piezometriche, Δ , aumenta all'aumentare delle velocità secondo la relazione:

$$\Delta = \int_A^B \frac{v^2}{gr} dr \quad (3.11)$$

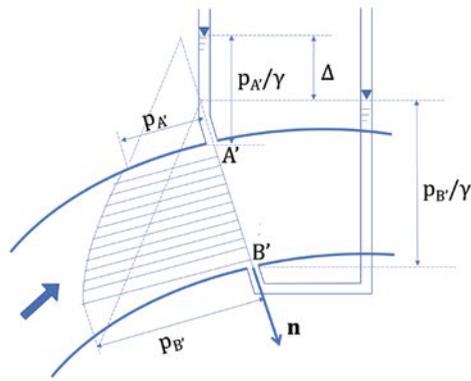
L'Eq. (3.11) mostra che Δ diminuisce all'aumentare del raggio di curvatura r . In una corrente che si muova in una tubazione rettilinea, la gradualità del moto può venire meno in corrispondenza di una singolarità, quale, ad esempio, il *brusco allargamento*, ovvero il passaggio senza alcun raccordo da un diametro minore D_1 ad uno maggiore D_2 , schematizzato in Fig. 3.6. In tale figura è riportato l'andamento qualitativo delle traiettorie in corrispondenza di tale singolarità. Si può quindi osservare che prima del brusco allargamento la corrente risulta

¹È possibile dimostrare le proprietà delle correnti gradualmente variate proiettando sulla terna intrinseca le equazioni di Euler che non sono trattate in questo corso.

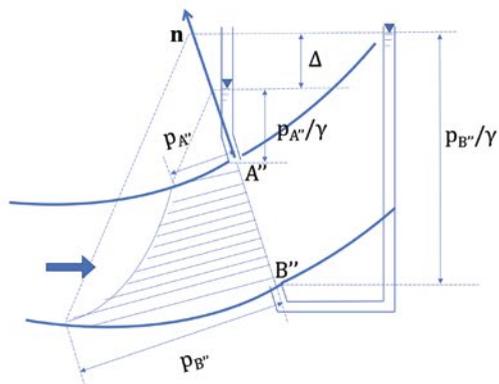
²È opportuno sottolineare che l'attributo *vario* implica, come detto, che le grandezze dipendono dal tempo; l'attributo *gradualmente variato*, invece, implica che i filetti fluidi siano rettilinei e paralleli. Una corrente gradualmente variata, quindi, potrà muoversi sia in moto vario sia in moto permanente.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.4: Distribuzione della pressione nella sezione trasversale di una corrente che si muove in un tronchetto: a) rettilineo; b) concavo e c) convesso.

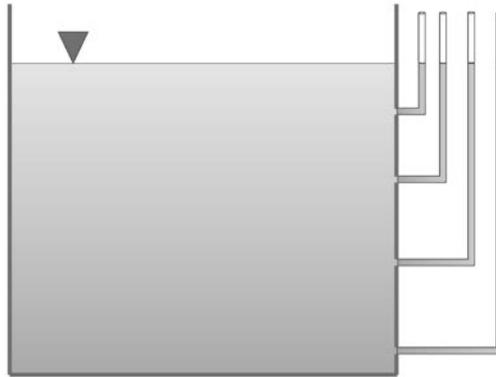


Figura 3.5: Evidenza dell'unicità della quota piezometrica in una massa liquida in quiete.

gradualmente variata e che ad una certa distanza dal cambio di diametro (pari a circa cinque volte il diametro), essa torna ad essere gradualmente variata.

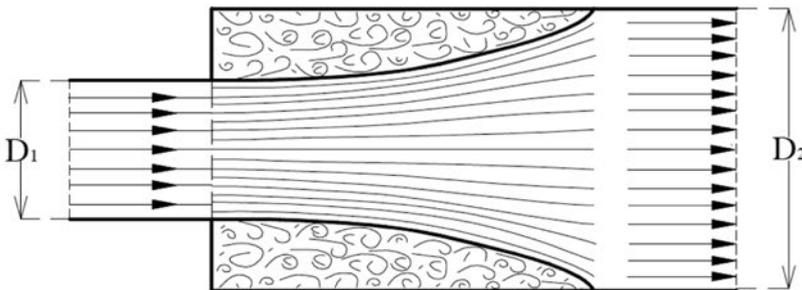


Figura 3.6: Schematizzazione del campo di moto in corrispondenza di un brusco allargamento in una tubazione in pressione.

3.4 Equazioni di continuità

Le equazioni di continuità traducono il *principio di conservazione della massa* in relazioni di tipo cinematico nelle quali compaiono esplicitamente grandezze di interesse per le applicazioni nel campo della Meccanica dei Fluidi.

In relazione agli argomenti trattati nel corso, verranno ricavate due delle forme dell'equazione di continuità: quelle, cioè, relative ad un filetto fluido e ad una corrente di sezione finita. In entrambi i casi si farà riferimento a condizioni di moto permanente.

3.4.1 Equazione di continuità per un filetto fluido

Come anticipato, per costruzione un filetto fluido rappresenta un tubo di flusso elementare nel quale cioè, essendo il vettore velocità tangente in ogni punto della sua superficie laterale, gli scambi di massa con l'esterno avvengono unicamente attraverso le due basi (Fig.3.2). Per questo motivo, in condizioni di moto permanente, la portata massica che defluisce in un filetto fluido si mantiene costante e l'equazione di continuità assume la seguente espressione:

$$dm = \rho v_n dA = \text{costante} \quad (3.12)$$

Nel caso di fluido omogeneo, incompressibile e processo isoterma ($\rho = \text{costante}$), l'equazione di continuità si scrive in termini di portata volumetrica, dQ , nella forma:

$$dQ = v_n dA = \text{costante} \quad (3.13)$$

3.4.2 Equazione di continuità per una corrente

In relazione alle applicazioni che verranno considerate nel corso, per il caso della corrente di sezione finita si farà riferimento unicamente a condizioni di liquido incompressibile e isoterma.

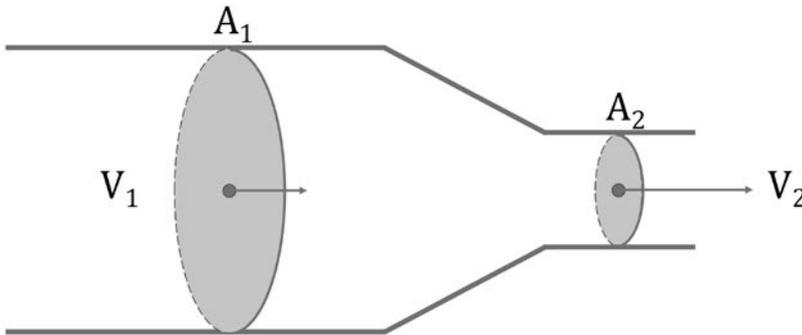


Figura 3.7: Generico tronco di corrente.

A tale scopo si consideri un tronco di corrente (Fig. 3.7) delimitato dalle sezioni 1, di area A_1 , e 2, di area A_2 . Nell'intervallo di tempo dt , la massa che entra attraverso la sezione 1 è pari a $dm_1 = \rho Q_1 dt$, mentre quella che esce attraverso la sezione 2 è pari a $dm_2 = \rho Q_2 dt$. Poiché, come già detto, la corrente è costituita da un insieme di filetti fluidi, nelle ipotesi fatte, all'interno del tronco di corrente considerato non si verificano variazioni di massa (né accumulo né rarefazione). Per questo motivo, si può scrivere:

$$dm_1 = dm_2 \implies \rho Q_1 dt = \rho Q_2 dt \quad (3.14)$$

ovvero, semplificando:

$$Q_1 = Q_2 = Q \quad (3.15)$$

Essendo quindi $V_1 = \frac{Q}{A_1}$ e $V_2 = \frac{Q}{A_2}$, l'Eq.(3.15) può anche scriversi nella forma:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q \quad (3.16)$$

la quale indica che, a parità di portata Q , la velocità media V è inversamente proporzionale alla sezione idrica A .

3.5 Teorema di Bernoulli per un filetto fluido

Il teorema di Bernoulli è il teorema fondamentale della Meccanica dei Fluidi. Esso si può derivare dall'equazione di Euler, ossia dall'equazione indefinita del moto per un fluido perfetto, pesante, incompressibile e in condizioni isoterme, per sistema chiuso in condizioni stazionarie. Nell'ambito di questo corso è però opportuno ricavare il teorema di Bernoulli seguendo un differente procedimento, con riferimento prima ad un filetto fluido e, quindi, ad una corrente gradualmente variata.

A tale scopo è opportuno esplicitare le ipotesi alla base del teorema di Bernoulli:

- sistema chiuso dal punto di vista energetico (ovvero non ci sono scambi di energia con l'esterno);
- fluido pesante (ovvero la forza peso rappresenta l'unica forza di massa agente);
- fluido omogeneo, incompressibile e in condizioni isoterme;
- fluido perfetto (ovvero privo di sforzi tangenziali);
- moto permanente.

Nelle condizioni sopra evidenziate, si consideri il filetto fluido schematizzato in Fig. 3.8: la Fig. 3.8a si riferisce all'istante t_1 mentre quella 3.8b al successivo istante t_2 .

Il volumetto di fluido evidenziato sulla sinistra in rosso in Fig. 3.8a è caratterizzato, al tempo t_1 , da una sezione dA_1 e da una lunghezza ds_1 ; è orizzontale e il suo baricentro si trova ad una quota geodetica z_1 rispetto al piano orizzontale adottato quale piano di riferimento ($z = 0$) delle quote geodetiche, z . Siano, infine, v_1 e p_1 i valori rispettivamente della velocità e della pressione.

All'istante t_2 , il medesimo volumetto di fluido, evidenziato sulla destra in rosso in Fig. 3.8b, assume una sezione dA_2 e una lunghezza ds_2 ; è orizzontale e il suo baricentro si trova ad una quota z_2 . Siano v_2 e p_2 i valori della velocità e della pressione. Appare opportuno sottolineare che l'andamento del filetto fluido può essere assolutamente qualsiasi. Nel caso di Fig. 3.8, ad esempio, esso si espande (risulta: $dA_2 > dA_1$) e si innalza (risulta: $z_2 > z_1$). Per chiarezza, nulla cambierebbe nella sostanza se, per effetto dell'andamento delle linee di flusso, si verificasse, ad esempio, il contrario ($z_2 < z_1$ e $dA_2 < dA_1$).

Nell'ipotesi di *fluido perfetto*, sono ovunque nulli gli sforzi tangenziali e quindi sul volumetto di fluido considerato agiscono le seguenti forze:

- forze di pressione $p_1 dA_1$ e $p_2 dA_2$, agenti rispettivamente agli estremi sinistro e destro del filetto fluido;
- forza di gravità.

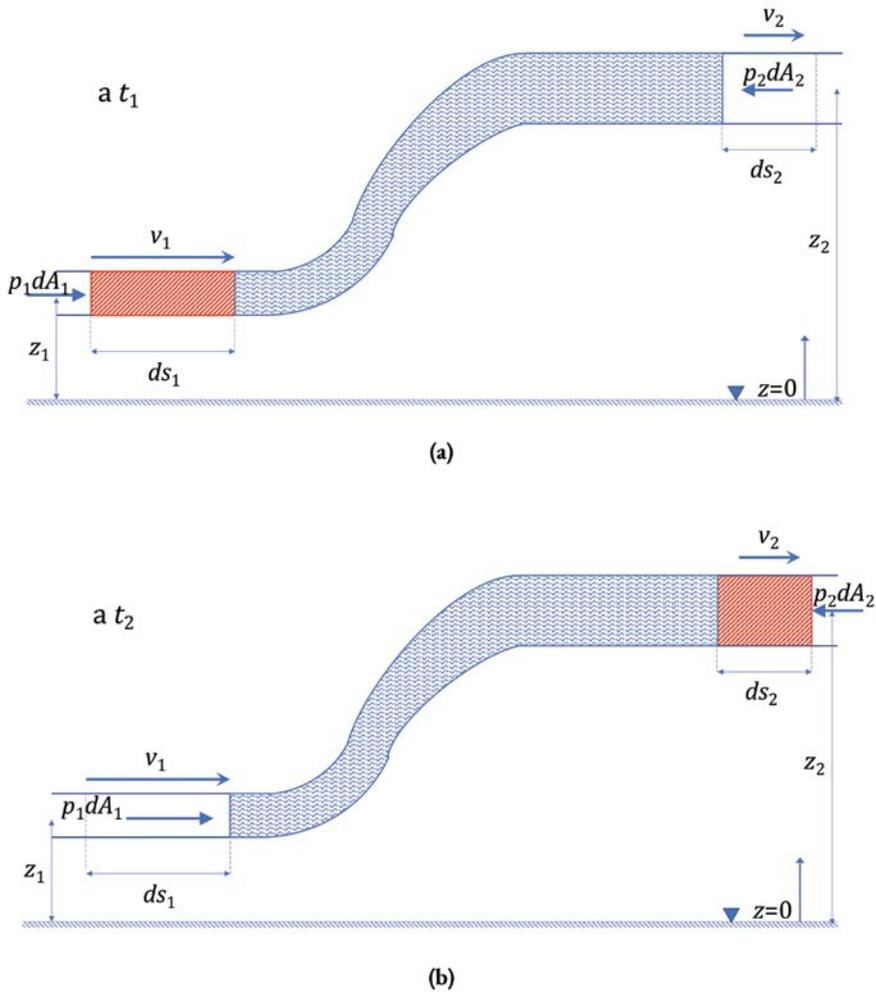


Figura 3.8: Filetto fluido considerato per ricavare il teorema di Bernoulli: a) tempo t_1 ; b) tempo t_2 , con $t_2 > t_1$.

Definite le forze agenti, è di interesse determinarne gli effetti in termini di caratteristiche del campo di moto e dello stato tensionale.

A tale proposito, si può fare riferimento al *teorema dell'energia cinetica* per il quale il lavoro esercitato dalle forze agenti sul volume di controllo, ossia il filetto fluido di Fig. 3.8, risulta pari alla variazione dell'energia cinetica che in esso si verifica.

Conviene inoltre osservare preliminarmente che l'azione delle forze agenti determina il sollevamento della quantità di fluido evidenziata in rosso (Fig. 3.8).

Il lavoro compiuto dalle forze esterne è fornito dalle seguenti relazioni:

- il lavoro compiuto dalla forza di pressione $p_1 dA_1$ è: $p_1 dA_1 ds_1$;
- il lavoro compiuto dalla forza di pressione $p_2 dA_2$ è: $-p_2 dA_2 ds_2$;
- il lavoro compiuto sul sistema dalla forza di gravità, consistente nel sollevamento della porzione di fluido evidenziata in rosso dalla quota z_1 alla quota z_2 , è: $-dmg(z_2 - z_1)$.

Il lavoro compiuto complessivamente dalle forze esterne, dL , risulta quindi:

$$dL = p_1 dA_1 ds_1 - p_2 dA_2 ds_2 - dm g(z_2 - z_1) \quad (3.17)$$

Poiché il volume del fluido in rosso resta costante essendo incomprimibile, risulta: $dA_1 ds_1 = dA_2 ds_2 = dW$. Risultando, inoltre, $dm = \rho \cdot dW$, il lavoro compiuto dalle forze esterne può scriversi nella forma:

$$dL = p_1 dW - p_2 dW - dm g(z_2 - z_1) = (p_1 - p_2) \frac{dm}{\rho} - dm g(z_2 - z_1) \quad (3.18)$$

La variazione dell'energia cinetica che si verifica nel volume di controllo considerato, dE_c , è fornita dalla seguente relazione:

$$dE_c = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 \quad (3.19)$$

Poiché per il menzionato teorema dell'energia cinetica si può scrivere:

$$dL = dE_c \quad (3.20)$$

risulta:

$$(p_1 - p_2) \frac{dm}{\rho} - dm g(z_2 - z_1) = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 \quad (3.21)$$

ovvero:

$$\frac{(p_1 - p_2)}{\rho g} - (z_2 - z_1) = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \quad (3.22)$$

in cui le grandezze $v_1^2/2g$ e $v_2^2/2g$ si definiscono *altezze cinetiche*. Se, quindi, si raggruppano i termini con pedice 1 e quelli con pedice 2, ricordando che il prodotto ρg rappresenta il peso specifico γ , si perviene alla seguente relazione:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (3.23)$$

Poiché i punti 1 e 2 sono del tutto generici, si può generalizzare questa espressione e scrivere:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{costante} \quad (3.24)$$

Si noti che tutti e tre i termini che compaiono nell'Eq.(3.24) hanno le dimensioni di una lunghezza e, quindi, possono esprimersi, ad esempio, in m.

L'equazione (3.24) rappresenta l'espressione matematica del **teorema di Bernoulli** per un filetto fluido. Esso si enuncia come segue: "in un sistema chiuso dal punto di vista energetico e per un fluido perfetto pesante, incompressibile e in condizioni isoterme che si muove in moto permanente, la somma della quota geodetica, dell'altezza piezometrica e di quella cinetica, si mantiene costante lungo un filetto fluido".

Il valore della costante viene individuato sulla base delle condizioni al contorno (ad esempio, il valore nel punto iniziale).

Indicando come **carico (idraulico) totale**, E , la somma della quota geodetica, dell'altezza piezometrica e di quella cinetica:

$$E = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \quad (3.25)$$

il teorema di Bernoulli per un filetto fluido si può scrivere nella forma:

$$E = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{costante} \quad (3.26)$$

Sulla base dell'Eq. (3.26), il teorema di Bernoulli si può enunciare anche come segue: "in un sistema chiuso dal punto di vista energetico e per un fluido perfetto pesante, incompressibile e in condizioni isoterme che si muove in moto permanente, il carico (idraulico) totale, E , si mantiene costante lungo un filetto fluido".

Delle Eqq. (3.24) e (3.26) è interessante considerare la cosiddetta *interpretazione geometrica* riportata in Fig. 3.9.

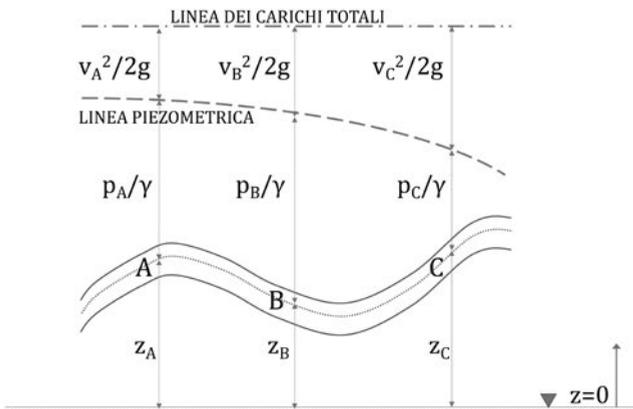


Figura 3.9: Interpretazione geometrica del teorema di Bernoulli.

A tale scopo, scelto un piano di riferimento per le quote geodetiche, in ciascuna sezione di un filetto fluido si associ un segmento a z , uno a $\frac{p}{\gamma}$, e uno a $\frac{v^2}{2g}$. Riportando tali segmenti uno sull'altro, in ciascuna sezione si raggiunge la medesima altezza. Nelle condizioni di validità del teorema di Bernoulli, quindi, la congiungente gli estremi superiori di tali segmenti, la cosiddetta *linea dei carichi (idraulici) totali*, è una retta orizzontale.

La linea che congiunge gli estremi dei segmenti rappresentativi della somma di z e $\frac{p}{\gamma}$, prende invece il nome di *linea piezometrica*.

3.6 Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente gradualmente variata

Come menzionato, l'Eq. (3.24), e ovviamente anche la (3.26) ad essa equivalente, è valida lungo un filetto fluido. La sua estensione ad una corrente, ad un insieme cioè di filetti fluidi, presenta alcune complicazioni di carattere concettuale. Fra queste si segnala il fatto che ciascun filetto fluido costituente la corrente è caratterizzato da un differente valore della costante. Un'ulteriore difficoltà deriva dal dover individuare un valore rappresentativo per l'intera corrente sia della pressione sia della velocità. Un procedimento molto seguito per l'estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente di sezione finita è quello di introdurre il concetto di *potenza di una corrente*. Anche in questo modo, tuttavia, è necessario introdurre delle semplificazioni, ovvero restringere il campo di interesse.

Con riferimento alle situazioni considerate nell'ambito di questo corso, appare opportuno restringere subito il campo di interesse alle correnti gradualmente variate nelle quali, come già evidenziato, la quota piezometrica, $h = z + \frac{p}{\gamma}$, assume lo stesso valore in tutti i punti di ciascuna sezione. Per tale tipo di correnti, viene pertanto superato il problema costituito dal dover individuare un valore rappresentativo di tale grandezza. Assumendo rappresentativo del contenuto cinetico dell'intera corrente il valore dell'altezza cinetica media $V^2/2g$, si può dimostrare che per una corrente gradualmente variata in regime *turbolento*³ l'Eq. (3.24) assume la seguente forma:

$$E = h + \frac{V^2}{2g} = \text{costante} \quad (3.27)$$

che si enuncia: “in una corrente gradualmente variata di un fluido perfetto pesante, incompressibile e in condizioni isoterme che si muova in moto permanente, il carico idraulico totale, E , si mantiene costante”.

È importante osservare che nell'Eq.(3.27) compaiono unicamente grandezze globali della corrente: la **quota piezometrica**, h (valore unico in tutti i punti di una sezione) e la **velocità media**, V . Nell'Eq.(3.26), invece, sono presenti solo grandezze **locali**: la quota geodetica, la pressione e la velocità nel baricentro della sezione trasversale di un filetto fluido.

³Nel capitolo 5 verrà data la definizione di *regime turbolento*.

3.7 Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente gradualmente variata di liquido reale

L'ipotesi di *liquido perfetto* introdotta per ricavare le Eqq. (3.26) e (3.27), valide rispettivamente per un filetto fluido e una corrente gradualmente variata, ne limita fortemente il campo di applicabilità, come sarà discusso nel seguito.

Per tenere conto del comportamento dei liquidi *reali*, coerentemente con l'impostazione finora seguita, si immagini di eseguire misure di quota piezometrica e altezza cinetica⁴, e quindi di carico idraulico totale, in una corrente reale (Fig. 3.10).

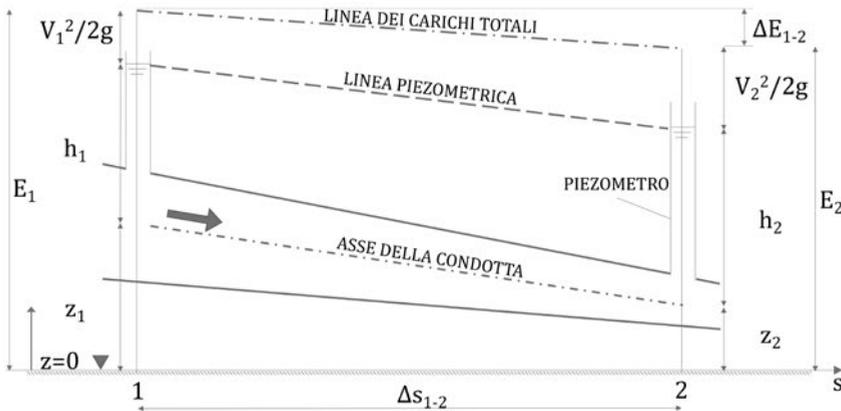


Figura 3.10: Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente di liquido reale: evidenza della diminuzione del carico (idraulico) totale nel verso del moto.

I risultati di tali misure metterebbero in evidenza che in condizioni di moto permanente il carico idraulico totale, E , diminuisce nel verso del moto. Facendo riferimento ad un tronco di corrente, di lunghezza Δs_{1-2} , compreso fra le sezioni 1 e 2, risulterebbe infatti:

$$E_1 > E_2 \quad (3.28)$$

La differenza $\Delta E_{1-2} = E_1 - E_2$ può attribuirsi alle dissipazioni di energia causate dall'azione degli sforzi tangenziali assunti nulli nell'ipotesi di fluido perfetto.

In Idraulica, con un approccio differente da quello proprio della Meccanica dei Fluidi, tali dissipazioni di energia si esprimono formalmente mediante la seguente relazione:

$$E_1 - E_2 = \Delta E_{1-2} = \int_1^2 J(s) ds \quad (3.29)$$

in cui J rappresenta la perdita di carico per unità di percorso e peso defluente. Nel capitolo 5 si forniranno gli strumenti per la valutazione di J per una corrente in moto uniforme, una condizione di moto particolare ma di notevole interesse applicativo.

⁴Si veda, al riguardo, la trattazione relativa al dispositivo detto *tubo di Pitot* nel capitolo 4.

3.8 Strumenti di misura della portata

Come già accennato a proposito dell'Eq. (3.9), in condizioni stazionarie, la portata può essere misurata dividendo il volume, globalmente defluito in un intervallo di tempo, per la durata di tale intervallo. Tale metodo, che viene definito *volumetrico* (perché si basa sulla misura del volume defluito in un determinato intervallo di tempo), è senz'altro il più preciso, purché, come già evidenziato, il fenomeno sia stazionario, ma può essere utilizzato unicamente in laboratorio.

Nelle moderne catene di strumentazioni, si utilizzano frequentemente i misuratori a *induzione magnetica* e quelli *ad ultrasuoni*. In questo paragrafo, quindi, se ne illustrano il principio di funzionamento e le principali caratteristiche. È opportuno anticipare che entrambi tali dispositivi appartengono alla categoria delle strumentazioni *non intrusive* nelle quali, cioè, la misura della grandezza di interesse non deriva da un'interazione *meccanica* fra il dispositivo stesso e il fluido di cui si vuole misurare una proprietà/grandezza. In particolare, tali dispositivi non *disturbano* la corrente per consentire la misura della portata. Come sarà illustrato nel seguito, tale caratteristica discende direttamente dal loro principio di funzionamento. In un successivo capitolo, l'illustrazione, con altre finalità, di dispositivi *intrusivi* (ad esempio, il *tubo di Pitot* e il *venturimetro*) chiarirà meglio questo concetto.

Un'ulteriore caratteristica in comune fra i misuratori ad induzione elettromagnetica e quelli ad ultrasuoni risiede nel fatto che per entrambi il segnale in uscita – legato alla portata che defluisce – essendo di tipo elettrico, può essere agevolmente trasmesso a distanza ed incluso, quindi, in un sistema di telecontrollo e telemisura.

3.8.1 Misuratori di portata ad induzione elettromagnetica

Tali strumenti di misura si basano sulla legge della *induzione elettromagnetica di Faraday*. Tale legge afferma che “un conduttore mobile in campo magnetico, di intensità B , è sede di una forza elettromotrice, la cui intensità è proporzionale alla velocità relativa di spostamento del conduttore rispetto al campo”.

Nel caso considerato, il conduttore è costituito dal liquido che defluisce in una tubazione in pressione di diametro D con una velocità media V (essendo il campo magnetico fermo, quest'ultima rappresenta la menzionata *velocità relativa di spostamento*). Il campo magnetico è generato avvolgendo intorno alla tubazione spire percorse da una corrente continua (Fig. 3.11). Per effetto della forza elettromotrice indotta, fra i punti estremi del diametro, ove sono applicati i due elettrodi, si determina una differenza di potenziale, ΔU . Si può dimostrare che vale la seguente relazione:

$$\Delta U = VBD = \frac{Q}{\pi D^2/4}BD = \frac{4B}{\pi D}Q \quad (3.30)$$

che può anche scriversi nella forma:

$$Q = k_{em}\Delta U \quad (3.31)$$

In base all'Eq. (3.31), quindi, la portata defluente risulta direttamente proporzionale alla differenza di potenziale misurata, essendo k_{em} una costante dello strumento determinata in laboratorio mediante taratura. Per la struttura lineare dell'Eq. (3.31) che consente di valutare la portata, i misuratori di portata ad induzione elettromagnetica si definiscono strumenti a *risposta lineare*. Tale caratteristica implica che le prestazioni dello strumento sono le stesse in

tutto il campo di variabilità della grandezza da misurare.

In relazione a quanto discusso, il disturbo al flusso dovuto alla presenza di un misuratore di portata ad induzione elettromagnetica è assolutamente trascurabile se ovviamente si ha l'accortezza di scegliere il diametro del dispositivo il più vicino possibile a quello della tubazione. Ciò comporta, come meglio sarà chiarito nel seguito, che non si verifichi alcuna dissipazione aggiuntiva di energia. Tali dispositivi consentono altresì di monitorare anche processi di moto non stazionari; con riferimento a tale aspetto, è opportuno osservare che le prestazioni peggiorano all'aumentare del diametro.

Fra i punti deboli dei misuratori ad induzione elettromagnetica, si segnala la possibilità di malfunzionamento dovuta al formarsi di incrostazioni sugli elettrodi – è necessario quindi prevederne la periodica pulizia – e la necessità di sezionare la tubazione in cui si vuole effettuare la misura per inserire il tronchetto che contiene il dispositivo. Per quest'ultimo motivo, i misuratori di portata ad induzione elettromagnetica, a differenza di quelli ad ultrasuoni (vedi sottoparagrafo successivo), non sono adatti a campagne di misura estemporanee.

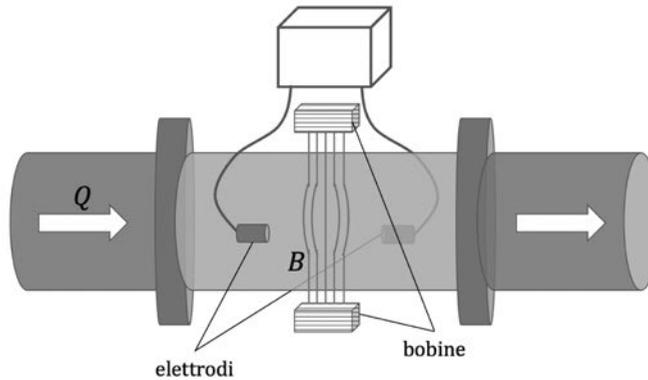


Figura 3.11: Schema di misuratore di portata ad induzione elettromagnetica.

3.8.2 Misuratori di portata ad ultrasuoni

Alcuni misuratori di portata ad ultrasuoni si basano sul cosiddetto *effetto Doppler*. Per spiegare questo fenomeno fisico, si considerino una sorgente che emetta un suono caratterizzato da una frequenza f_s e un osservatore. Nel caso in cui sia la sorgente sia l'osservatore siano fermi, quest'ultimo percepirà il suono con la frequenza di emissione f_s . Qualora, invece, la sorgente e l'osservatore siano in un moto relativo fra di loro, l'osservatore percepirà una frequenza, f_o , diversa da f_s . Possiamo riscontrare questo fenomeno nella variazione del suono emesso, ad esempio, dalla sirena di un'ambulanza o dal fischio di un treno a seconda che essi si avvicinino o si allontanino da un osservatore.

Questo cambiamento apparente della frequenza (del suono) è comune ad altri fenomeni ondulatori. Si pensi, ad esempio, al moto ondoso. Stando fermi sulla spiaggia, infatti, vediamo arrivare un'onda ogni T secondi – essendo T il *periodo del moto ondoso* – e quindi con una frequenza $f_s = 1/T$. Se, invece, entrassimo in acqua e ci muovessimo verso il largo andando incontro alle onde, incontreremmo queste ultime con una frequenza f_o maggiore di f_s , ovvero fra un'onda e la successiva intercorrerebbe un intervallo di tempo minore di T . Al contrario, se

ci muovessimo dal largo verso la riva, percepiremmo un moto ondoso caratterizzato da una frequenza minore di f_s .

Il fenomeno sopra descritto – il summenzionato *effetto Doppler* – avviene perché cambia la frequenza (del suono o del moto ondoso) nel sistema di riferimento solidale con l'osservatore pur essendo rimasta inalterata quella nel sistema di rilevamento solidale alla sorgente (del suono o del moto ondoso).

Una spiegazione semplice dell'effetto Doppler si può fornire rappresentando le onde sonore emesse da una sorgente – ad esempio, l'autoambulanza di Fig. 3.12 – attraverso dei cerchi concentrici. In particolare, i cerchi disegnati con tratto continuo e discontinuo corrispondono, rispettivamente, alle creste e ai cavi delle onde sonore.

Nel caso in cui la sorgente – ossia la sirena dell'autoambulanza – sia ferma, nell'unità di tempo l'osservatore sarà raggiunto da tante creste (compressioni) quante sono quelle emesse dalla sorgente. Nel caso in cui, invece, l'autoambulanza si muova verso l'osservatore, nell'unità di tempo questo sarà investito da un numero di creste maggiore percependo, quindi, un suono più acuto. Fenomeno opposto, cioè la percezione di un suono più grave, si verificherebbe se l'autoambulanza si allontanasse dall'osservatore.

Si definisce *frequenza Doppler*, f_D , la differenza fra la frequenza rilevata dall'osservatore, f_o , e quella di emissione, f_s :

$$f_D = f_o - f_s \quad (3.32)$$

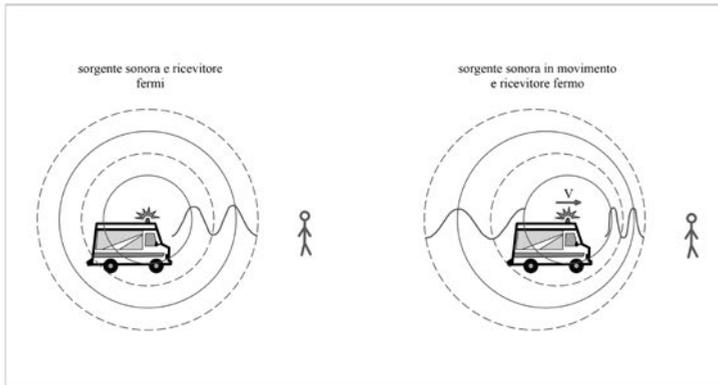


Figura 3.12: Schematizzazione dell'effetto Doppler (Fonte: OpenProf.com).

Nei misuratori ad ultrasuoni ad effetto Doppler, gli elementi principali sono un altoparlante A e un microfono M⁵, applicati sulla parete esterna della tubazione (Fig. 3.13).

Il suono, di frequenza f_s , emesso dall'altoparlante attraversa la parete della condotta e penetra nel liquido che vi defluisce. Affinché lo strumento funzioni correttamente, è necessario che il liquido trasporti in sospensione delle particelle solide di idonee dimensioni⁶. Tali particelle solide, infatti, riflettono il suono anche verso il microfono M determinando un doppio effetto Doppler: il primo perché le particelle solide sono in moto rispetto all'altoparlante e il secondo

⁵Sia per l'altoparlante sia per il microfono è necessario garantire la *continuità acustica* con la parete della tubazione utilizzando un idoneo gel.

⁶La scelta delle particelle solide con le quali *inseminare* il liquido ai fini dell'impiego di dispositivi ad ultrasuoni è molto delicata per quanto riguarda la loro densità, dimensione e concentrazione.

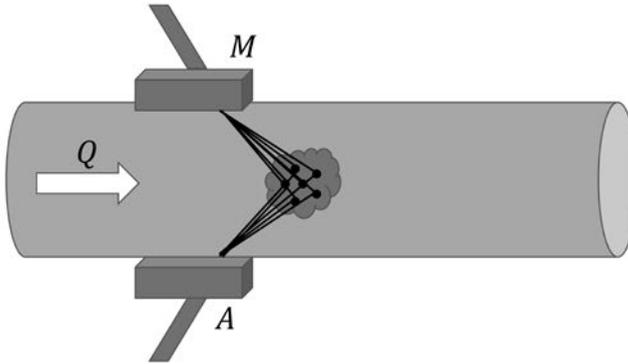


Figura 3.13: Schema di misuratore di portata ad ultrasuoni a effetto Doppler con indicazione delle particelle solide e della loro interazione con il fascio sonoro.

perché esse sono in moto rispetto al microfono M . Quest'ultimo, quindi, acquisisce un'onda sonora la cui frequenza dipende dalla velocità delle particelle trasportate dalla corrente. Dalla variazione di frequenza rilevata rispetto a quella emessa, e quindi dall'entità dell'effetto Doppler, si può risalire alla velocità delle particelle solide. Tranne casi molto particolari, avendo scelto opportunamente le particelle solide, la velocità di queste può essere assunta uguale a quella della particella fluida che si trovasse nella medesima posizione.

Per la sua dimensione non trascurabile, il fascio sonoro emesso dall'altoparlante investe contemporaneamente più particelle solide. Il microfono, pertanto, è raggiunto contemporaneamente da più onde sonore rilevando frequenze differenti essendo differenti le velocità delle particelle solide interessate. Ciò rende necessario elaborare opportunamente le frequenze Doppler acquisite per ottenere un valore, f_D^* , rappresentativo dell'intera corrente.

La successiva taratura dello strumento deve pertanto considerare parametri quali le caratteristiche della zona della corrente che viene investita dal fascio sonoro, quelle della tubazione (materiale, diametro, spessore ed eventuale rivestimento) e la temperatura del liquido. È possibile quindi esprimere la portata mediante una relazione del tipo:

$$Q = k_{us} f_D^* \quad (3.33)$$

in cui k_{us} rappresenta la costante dello strumento.

Riferimenti bibliografici

Mongiardini, V. (1981). *Lezioni di Idraulica*. Libreria Eredi Virgilio Veschi, Roma.

Çenger, Y.A., e Cimbala, J.M. (2007). *Meccanica dei Fluidi*, Edizione italiana a cura di G. Cozzo e C. Santoro, The McGraw-Hill Companies Inc., Milano.

Citrini, D., Nosedà, G. (2009). *Idraulica*. Casa Editrice Ambrosiana, Milano.

Gallati, M. e Sibilla, S. (2009). *Fondamenti di Idraulica*. Carocci Editore, Roma.

Pulci Doria, G. (1992). *Metodologie moderne di misure idrauliche e idrodinamiche*. Cooperativa Universitaria Editrice Napoletana (CUEN), Napoli.

Rossi, G. (2010). *Misure meccaniche e termiche. Basi teoriche e principali sensori e strumenti*. Carocci Editore, Roma.

Capitolo 4

Processi di moto debolmente dissipativi

4.1 Premessa

Gli obiettivi di questo capitolo sono almeno due: applicare il teorema di Bernoulli nella sua formulazione *originale* – quella cioè valida per fluidi perfetti – per evidenziarne l'importanza e discutere, quindi, i meccanismi che determinano le trasformazioni di quota piezometrica in altezza cinetica e viceversa. A tale scopo, sono stati selezionati dei processi di moto nei quali l'effetto degli sforzi tangenziali, considerati nulli nell'ipotesi di fluido perfetto, è sostanzialmente trascurabile. Per questo motivo ad essi si fa riferimento come a *processi di moto debolmente dissipativi*.

4.2 Il tubo di Pitot

Preliminarmente all'analisi del *tubo di Pitot*, un dispositivo che viene utilizzato per misurare la velocità in un punto di una massa liquida, è necessario esaminare l'interazione fra un flusso – in particolare, un filetto fluido – e un ostacolo, ad esempio di forma cilindrica (Fig. 4.1). In corrispondenza del punto R (di suddivisione) – definito *punto di ristagno* – il filetto fluido si divide e la velocità si annulla. In corrispondenza del punto di ristagno, infatti, dovendo la velocità risultare sempre tangente al filetto fluido, dovrebbe essere contemporaneamente tangente a due direzioni diverse. Ciò è possibile solo se la velocità è nulla.

È opportuno osservare che il fenomeno presenta caratteri sostanzialmente uguali a monte dell'ostacolo indipendentemente dal comportamento assunto per il fluido. Questo, invece, determina sensibili differenze a valle a seconda che si assuma un comportamento ideale (Fig. 4.1a) o reale (Fig. 4.1b).

Il risultato appena discusso – ossia l'annullamento della velocità in corrispondenza del punto di ristagno – trova un'importante applicazione nel tubo di Pitot. Si tratta di un tubo piegato a 90° il cui ramo più corto, con un piccolo foro in corrispondenza del punto di ristagno, viene inserito contro corrente e allineato con la direzione locale della velocità. Il ramo più lungo, invece, realizzato in genere con materiale trasparente, è posto in comunicazione con l'atmosfera. Ad una distanza a monte dove la corrente non sia disturbata dal tubo di Pitot, viene installato un piezometro; sia P un punto della sezione in cui è installato il piezometro.

Applicando il teorema di Bernoulli al filetto fluido che termina nel punto di ristagno R (Fig. 4.2), si può scrivere:

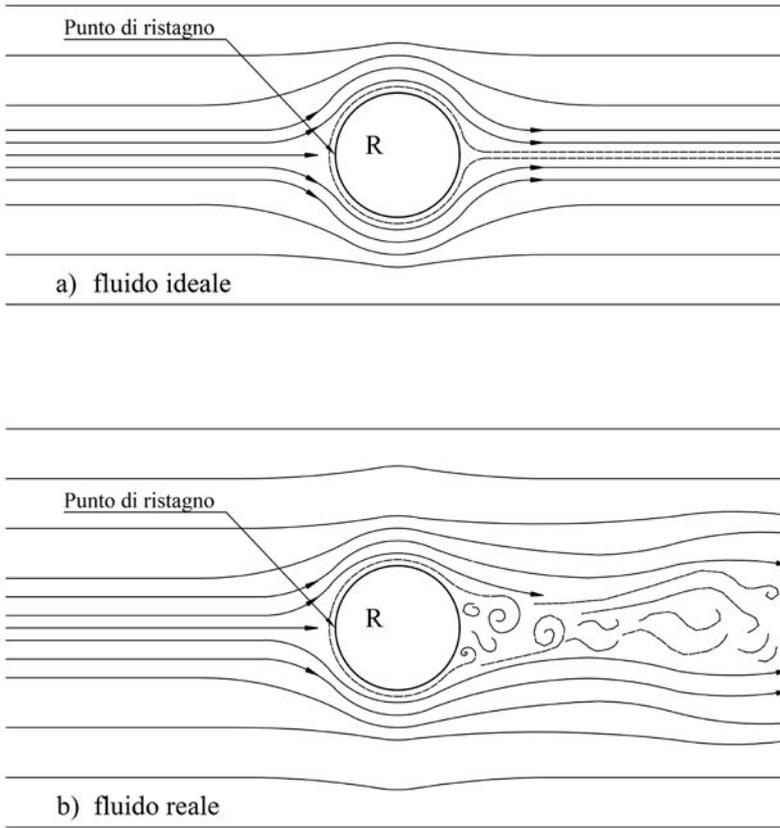


Figura 4.1: Corrente uniforme che investe un ostacolo e *punto di ristagno*: a) caso del fluido ideale; b) caso del fluido reale.

$$E_P = E_R \quad (4.1)$$

ossia:

$$z_P + \frac{p_P}{\gamma} + \frac{v_P^2}{2g} = z_R + \frac{p_R}{\gamma} \quad (4.2)$$

essendo nulla v_R e ammettendo che nel punto P la corrente non sia disturbata dal tubo di Pitot. I modesti effetti dissipativi che si verificano fra i punti P e R saranno discusso nel seguito quando si evidenzierà la necessità di tarare il dispositivo.

È opportuno osservare che se nella sezione a cui appartiene il punto P la corrente è gradualmente variata, il piezometro installato misura la quota piezometrica nella sezione, h_P , che risulta pari a $z_P + p_P/\gamma$.

Dall'Eq. (4.2), essendo $z_P = z_R$, risulta:

$$\frac{p_P}{\gamma} + \frac{v_P^2}{2g} = \frac{p_R}{\gamma} \quad (4.3)$$

la quale mostra che la pressione nel punto R è maggiore di quella nel punto P. Dalla lettura della cosiddetta *pressione di ristagno*, Δ (Fig. 4.2):

$$\Delta = \frac{p_R}{\gamma} - \frac{p_P}{\gamma} = \frac{v_P^2}{2g} \quad (4.4)$$

nelle ipotesi fatte, si può quindi ricavare il valore della velocità nel punto P:

$$v_P = \sqrt{2g\Delta} \quad (4.5)$$

Dall'Eq.(4.5) risulta che il valore della velocità si ottiene attraverso una misura di quota piezometrica (quella nel punto P) e una di carico idraulico totale (nel punto R). Da quanto mostrato, risulta che il tubo di Pitot è uno strumento di misura *intrusivo*: per poter misurare la velocità in un punto è necessario inserire il dispositivo in corrispondenza del punto prescelto, disturbando la corrente. È proprio tale disturbo alla corrente – che comporta l'annullamento della velocità nel punto di ristagno – a consentire la misura della velocità.

Il confronto fra il valore di v_P fornito dall'Eq. (4.5) e quello reale, v_P^* , evidenzia la necessità di introdurre un coefficiente correttivo, k_{Pt} , minore dell'unità, per portare in conto i fenomeni dissipativi che si verificano fra i punti P e R:

$$v_P^* = k_{Pt} \sqrt{2g\Delta} \quad (4.6)$$

L'applicabilità del teorema di Bernoulli al caso in esame – caratterizzato dalla piccola distanza fra P e R e dalla ridotta influenza delle pareti – è confermata dal fatto che il valore del coefficiente k_{Pt} è molto prossimo a 1.

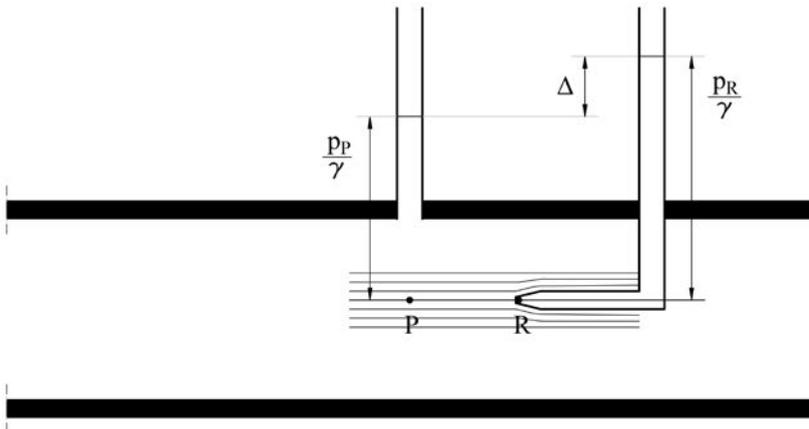


Figura 4.2: Principio di funzionamento del tubo di Pitot.

Al fine di migliorare le prestazioni del tubo di Pitot, è opportuno che i punti P e R siano il più possibile vicini. A tale scopo è stato introdotto il cosiddetto *tubo di Pitot-Prandtl* (Fig. 4.3). In tale versione del tubo di Pitot, la quota piezometrica viene misurata in corrispondenza della presa *statica*, realizzata attraverso una serie di forellini praticati lungo un parallelo del corpo cilindrico costituente il dispositivo. La distanza, λ , fra la presa *statica* e quella *dinamica* (in corrispondenza del punto di ristagno) deve essere tale che le traiettorie abbiano riacquisito l'originaria direzione. In pratica, λ deve risultare pari a circa dieci volte il diametro del corpo cilindrico, che è dell'ordine del mezzo centimetro per minimizzare il disturbo alla corrente.

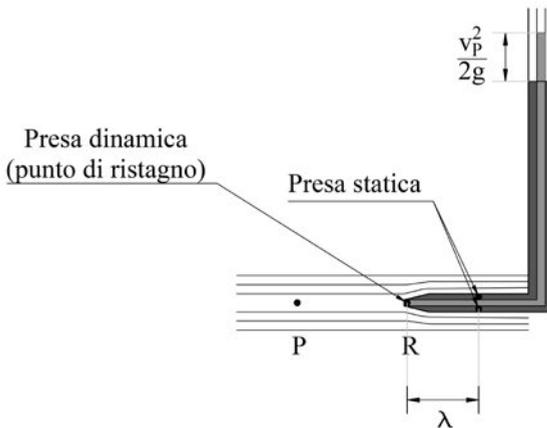


Figura 4.3: Schema di tubo di Pitot-Prandtl.

L'Eq.(4.6) indica che i dispositivi illustrati non sono adatti a misurare velocità molto piccole (a velocità dell'ordine di 1 m/s corrisponde, infatti, un valore di Δ dell'ordine di 5 cm). Per questo motivo essi sono largamente impiegati in campo aeronautico e marittimo, caratterizzati da maggiori velocità. È opportuno inoltre sottolineare l'importanza del corretto allineamento del tubo di Pitot con la direzione della corrente (sono ammesse deviazioni angolari minori di 10°).

Come sottolineato nel capitolo 3, l'ipotesi di *fluido perfetto* preclude l'applicabilità del teorema di Bernoulli ai processi di moto che coinvolgono i liquidi "reali", cioè **tutti** i liquidi. La sua importanza, comunque, è rilevante sotto diversi punti di vista. In primo luogo, l'aver mostrato che le variazioni di quota geodetica, altezza piezometrica – ovvero quota piezometrica – e altezza cinetica sono legate fra di loro: ad un aumento di quota piezometrica, ad esempio, corrisponde una diminuzione di altezza cinetica e viceversa. Nei fluidi perfetti queste variazioni si bilanciano esattamente mentre in quelli reali si verifica una differenza per effetto delle dissipazioni di energia. In secondo luogo, è fondamentale l'aver individuato nella differenza di carico idraulico totale fra due sezioni – grandezza misurabile abbastanza agevolmente – gli effetti delle dissipazioni di energia verificatesi fra tali sezioni.

In alcuni casi, però, come anticipato, il confronto fra i risultati delle esperienze di laboratorio e quelli derivanti dall'applicazione del teorema di Bernoulli nella sua formulazione originale

mostra un accordo molto soddisfacente. Si tratta, in particolare, di processi di moto di breve sviluppo in assenza di singolarità nei quali le velocità aumentano nel verso del moto (*correnti accelerate*).

4.3 Processi di efflusso attraverso una luce

Il processo di efflusso attraverso una luce realizzata sul fondo di un serbatoio (Fig. 4.4) viene esaminato nell'ambito della *Foronomia*, capitolo dell'Idraulica che tratta i processi di efflusso di liquidi attraverso luci (fori) aperti nelle pareti dei recipienti che li contengono. Questo tipo di luce si definisce "a battente" in quanto il suo contorno si trova tutto al di sotto della superficie di pelo libero del recipiente. Si definisce "battente" o "carico sulla luce" la distanza, h , fra il pelo libero e il punto più depresso della luce. Le luci a battente si differenziano da quelle "a stramazzo" (Fig. 4.5) il cui contorno è solo parzialmente sommerso.

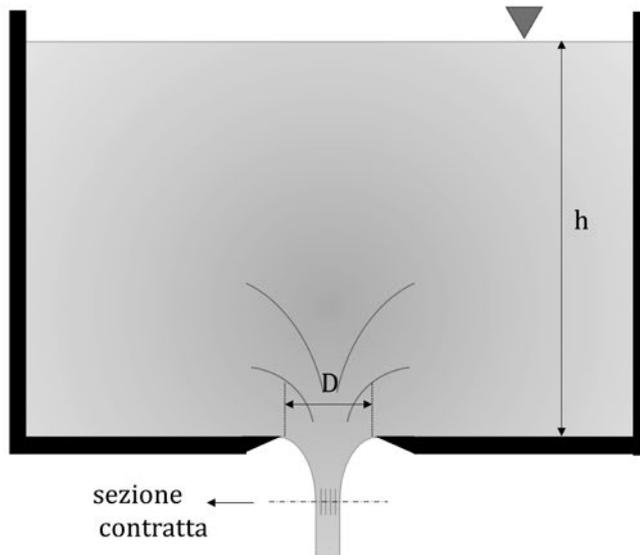


Figura 4.4: Serbatoio con luce di fondo (a battente) con indicazione del fenomeno di *chiamata allo sbocco* e di *contrazione* della vena effluente.

L'efflusso libero di una vena liquida si verifica quando questa fuoriesce da una luce (foro) ovvero sfiora su un bordo fisso senza essere guidata da contorni fissi. Si tratta di un fenomeno accelerato e localizzato nel quale la forza di gravità recita un ruolo fondamentale. A valle della luce è opportuno distinguere due zone: quella immediatamente a valle e quella, successiva, nella quale si sviluppa un getto la cui conformazione deriva dall'azione combinata della gravità e della forza di inerzia.

Si esamini, quindi (Fig. 4.4), il processo di efflusso libero nell'atmosfera di un liquido soggetto alla gravità (liquido pesante) attraverso una luce circolare, di diametro D e area A , presente sul fondo orizzontale di un serbatoio (luce di fondo). Questo processo di efflusso è stazionario (e

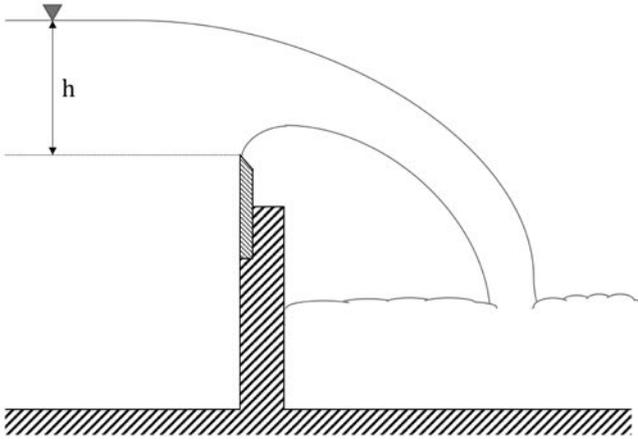


Figura 4.5: Luce a stramazzo (*stramazzo Bazin*).

quindi tutte le grandezze non dipendono dal tempo) se il livello del serbatoio, sul quale agisce la pressione atmosferica, è costante. Questa condizione si verifica se il serbatoio è alimentato con una portata uguale a quella effluente attraverso la luce ovvero se la sua sezione orizzontale è talmente ampia da rendere inapprezzabile l'abbassamento del livello, almeno in un intervallo di tempo limitato. Inoltre, affinché durante l'efflusso il pelo libero si mantenga orizzontale, è necessario che il valore di h sia significativamente maggiore del diametro D . Deve, in pratica risultare $h/D \geq 10$ perché non si formino vortici, ovvero la superficie di pelo libero non presenti concavità. Al diminuire del carico, infatti, si forma una concavità sempre maggiore che si trasforma quindi in un vero e proprio vortice (si ha diretta esperienza di tale fenomeno osservando l'efflusso attraverso lo scarico in un lavandino domestico).

Quando il carico è molto maggiore del diametro, in gran parte del serbatoio il liquido è praticamente in quiete e solo il volume di liquido molto vicino alla luce partecipa al processo di efflusso. In tale limitato volume si verifica il cosiddetto fenomeno di "chiamata allo sbocco". In buona parte del serbatoio, quindi, le velocità sono molto piccole così pure i gradienti di velocità e quindi gli sforzi tangenziali (proporzionali alle differenze di velocità fra le particelle). La trascurabilità degli sforzi tangenziali consente di applicare in questo caso il teorema di Bernoulli con risultati senz'altro accettabili ai fini pratici.

Perché il comportamento del fluido durante l'efflusso sia ancor più assimilabile a quello di un fluido perfetto, è importante che la luce sia in "parete sottile" (ossia abbia uno spessore piccolo rispetto al diametro) e sia lavorata "a spigolo vivo" (Fig. 4.6a). In caso di luce praticata in parete grossa (Fig. 4.6b), infatti, a contatto con la parete lungo lo spessore di questa insorgerebbero degli sforzi tangenziali. Nel caso della luce in parete sottile e a spigolo vivo, invece, il contatto del liquido con la luce si riduce alla circonferenza interna e, quindi, in pratica, a una linea. La luce, inoltre, deve essere sufficientemente lontana dalle pareti verticali del serbatoio in modo che si possa escludere una loro influenza sul fenomeno. In queste condizioni, a valle della luce si verifica un fenomeno di progressiva contrazione della vena effluente fino a che le traiettorie si

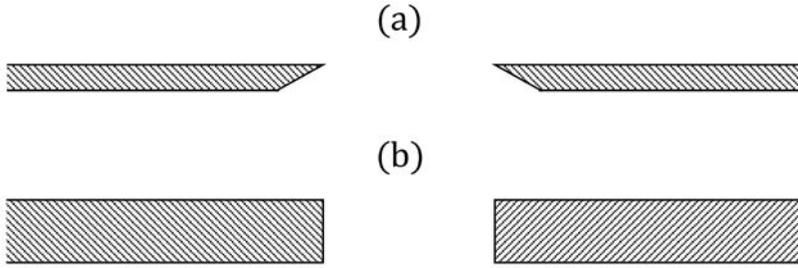


Figura 4.6: Modalità di realizzazione di una luce: a) luce in parete sottile a spigolo vivo; b) luce in parete grossa.

raddrizzano disponendosi parallele fra di loro nella cosiddetta “sezione contratta” (Fig. 4.4). Più a valle la sezione del getto si riduce progressivamente per effetto della forza di gravità. Nel caso in cui, invece, la luce sia praticata su una parete verticale (Fig. 4.7), l’effetto della gravità determina l’andamento del getto effluente deriva dalla combinazione dell’effetto della forza di inerzia e di quella di gravità. In particolare, quanto minore è la velocità di efflusso e, quindi, la forza di inerzia, più il getto si dispone orizzontalmente. Il getto “0” (Fig. 4.7a), ad esempio, si stabilirebbe in assenza di forza di gravità mentre quelli “1” e “2” si riferiscono a condizioni in cui l’effetto di quest’ultima è via via maggiore (Figg. 4.7b e 4.7c).

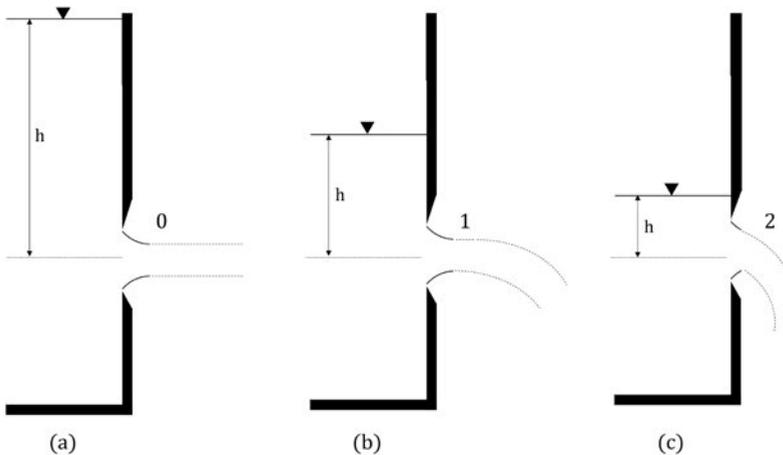


Figura 4.7: Caso della luce su parete verticale ed effetto della gravità.

Facendo riferimento alla luce di fondo (Fig. 4.8), è possibile applicare il teorema di Bernoulli alla traiettoria che passa per i punti A (posto in una zona del serbatoio nella quale non si risente del fenomeno di chiamata allo sbocco) e B (appartenente alla sezione contratta). Pertanto si può scrivere:

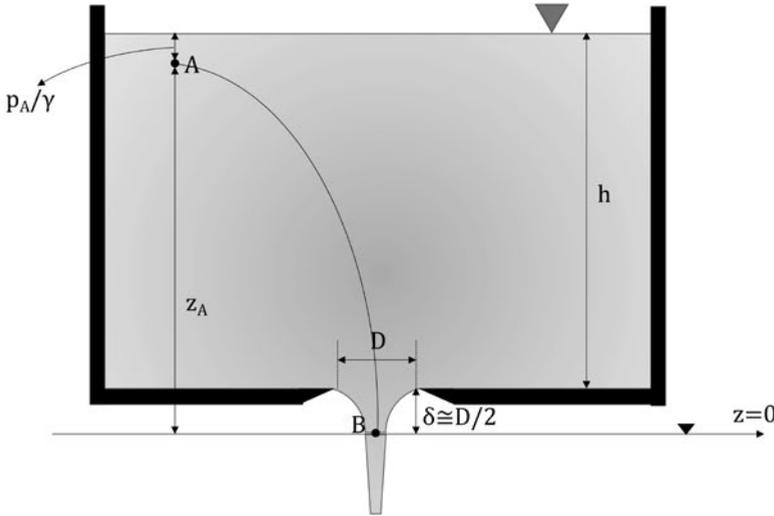


Figura 4.8: Serbatoio con luce di fondo circolare e in parete sottile con indicazione di una generica traiettoria.

$$E_A = E_B \quad (4.7)$$

ossia:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} \quad (4.8)$$

in cui, solo per comodità, la quota geodetica, z , viene misurata dal piano orizzontale passante per la sezione contratta.

A primo membro dell'Eq. (4.8) risulta:

$$v_A = 0$$

in quanto il punto A si trova a sufficiente distanza dalla luce. In tale zona, pertanto, si stabiliscono condizioni idrostatiche e quindi, per la legge di Stevin, si può scrivere, in termini di pressioni relative:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = h + \delta$$

Nella sezione contratta, per l'andamento rettilineo e parallelo delle traiettorie, si stabilisce una corrente gradualmente variata in tutti i punti della quale, quindi, la quota piezometrica assume lo stesso valore, h^* , e si può scrivere:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{costante} = h^* \quad (4.9)$$

Poiché, però, per la scelta del piano di riferimento delle z , risulta $z = 0$ in tutti i punti della sezione contratta, l'Eq. (4.9) diviene:

$$\frac{p}{\gamma} = h^* \quad (4.10)$$

e quindi anche la pressione assume lo stesso valore in tutti i punti della sezione contratta. Considerando, infine, che nei punti della sezione contratta a contatto con l'atmosfera la pressione (relativa) è nulla, in tutti i punti della sezione contratta, anche quelli interni, la pressione è nulla. In definitiva, l'Eq. (4.8) assume la forma:

$$h + \delta = \frac{v_B^2}{2g} \quad (4.11)$$

Poiché questo ragionamento può essere ripetuto per tutte le traiettorie che, originate in zone lontane dalla luce, passano per la sezione contratta, in tutti i punti di questa la velocità assume il medesimo valore:

$$v_c = \sqrt{2g(h + \delta)} \quad (4.12)$$

Poiché la distanza, δ , fra la luce e la sezione contratta è molto piccola (pari circa a $D/2$ nel caso considerato di sezione circolare), come anticipato, risultando h molto maggiore di D e quindi di δ , si può senz'altro scrivere:

$$v_t = \sqrt{2gh} \quad (4.13)$$

in cui v_t è la cosiddetta *velocità torricelliana*. Evangelista Torricelli, infatti, nel suo trattato "Del moto dei gravi", pubblicato nel 1664, affermava che "i liquidi che fuoriescono da un foro di un recipiente hanno la stessa velocità di un grave che cada dalla superficie libera del liquido fino all'altezza del foro". Torricelli, inoltre, verificò che getti diretti verso l'alto arrivano ad altezze praticamente pari alla quota del pelo libero dei recipienti da cui essi provengono. Ebbe inoltre l'intuizione che l'altezza lievemente minore del getto che sperimentalmente si riscontra in queste esperienze è dovuta ai fenomeni di attrito.

Nella realtà, a causa degli effetti dissipativi dovuti alla viscosità nelle immediate vicinanze della luce, la velocità effettiva, v_e , risulta leggermente più piccola di v_t :

$$v_e = C_v \sqrt{2gh} \quad (4.14)$$

nella quale il *coefficiente di velocità*, C_v , varia fra 0.96 e 1.

Nota la velocità in tutti i punti della sezione contratta, è immediato calcolare la portata defluente dalla luce, Q_ℓ :

$$Q_\ell = v_e A_c = C_v \sqrt{2gh} A_c \quad (4.15)$$

in cui A_c rappresenta l'area della sezione contratta. Poiché nell'Eq. (4.15) devono essere stimati sia C_v sia A_c , è opportuno definire il *coefficiente di contrazione*:

$$C_c = \frac{A_c}{A_\ell} \quad (4.16)$$

in cui A_ℓ indica l'area della luce, e scrivere l'Eq. (4.15) nella forma:

$$Q_\ell = C_v C_c A_\ell \sqrt{2gh} \quad (4.17)$$

Definito *coefficiente di efflusso*, C_d , il prodotto fra il coefficiente di velocità e quello di contrazione:

$$C_d = C_v C_c \quad (4.18)$$

l'Eq. (4.17) si scrive nella forma:

$$Q_\ell = C_d A_\ell \sqrt{2gh} \quad (4.19)$$

definita *equazione fondamentale della foronomia*. In tale equazione risulta da determinare sperimentalmente solo il coefficiente di efflusso, C_d , che, per quanto illustrato, definisce completamente il *comportamento idraulico* di una luce.

4.4 L'effetto Venturi e il venturimetro

Il *venturimetro*, o tubo di Venturi (Fig. 4.9), è uno strumento utilizzato in passato per la misura della portata attraverso misure di pressione. Il suo nome è in onore di Giovanni Venturi, idraulico italiano del '700, che si occupò della correlazione tra pressione e velocità.

Oggi il venturimetro non è più utilizzato non solo per il suo notevole ingombro ma anche perché, come anticipato, gli strumenti di misura più moderni (ad esempio, quelli ad induzione elettromagnetica e ad ultrasuoni) possono essere inseriti nelle reti di telecontrollo e telemisura. Il suo interesse permane tuttavia in relazione a quello che viene definito *l'effetto Venturi*, la trasformazione, cioè, di pressione in velocità in ossequio al teorema di Bernoulli.

Il venturimetro è costituito da tre tronchi di tubazione: un tratto (convergente) – che porta il diametro dal valore D , proprio della condotta in cui si vuole misurare la portata, ad uno più piccolo d – il secondo con diametro d costante e il terzo (divergente) che riporta il diametro dal valore d a quello D . È opportuno sottolineare che, per limitare le dissipazioni di energia, il passaggio dal diametro d a quello D deve essere molto più graduale di quello del precedente passaggio da D a d .

Per semplicità di esposizione, si immagini di installare un piezometro nella sezione 1, che precede il restringimento, e in quella 2, nel tronchetto di diametro d . È importante osservare che in entrambe tali sezioni la corrente si può ritenere gradualmente variata. Ciò comporta che in tutti i punti di ciascuna di esse la quota piezometrica assume un unico valore, rispettivamente h_1 e h_2 .

È inoltre opportuno mettere in evidenza che, in condizioni stazionarie e nell'ipotesi di fluido incompressibile, la portata nei tre tronchi, Q , è costante. Vale cioè l'Eq. (3.16) – $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$ – ed essendo $A_2 < A_1$, risulta $V_2 > V_1$.

Si applichi, quindi, il teorema di Bernoulli tra le sezioni 1 e 2:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (4.20)$$

L'Eq. (4.20) mostra che, essendo, come detto, per il rispetto della continuità, $V_2 > V_1$, deve risultare anche $h_2 < h_1$. La riduzione di area che si verifica fra le sezioni 1 e 2, e il conseguente incremento della velocità, determina, quindi, una diminuzione della quota piezometrica. Tale riduzione, essendo modesta la differenza fra z_1 e z_2 , corrisponde sostanzialmente ad una diminuzione della pressione risultando, quindi, $p_2 < p_1$. Tale trasformazione – il già menzionato *effetto Venturi* – trova riscontro nell'andamento della linea piezometrica riportata in Fig. 4.9.

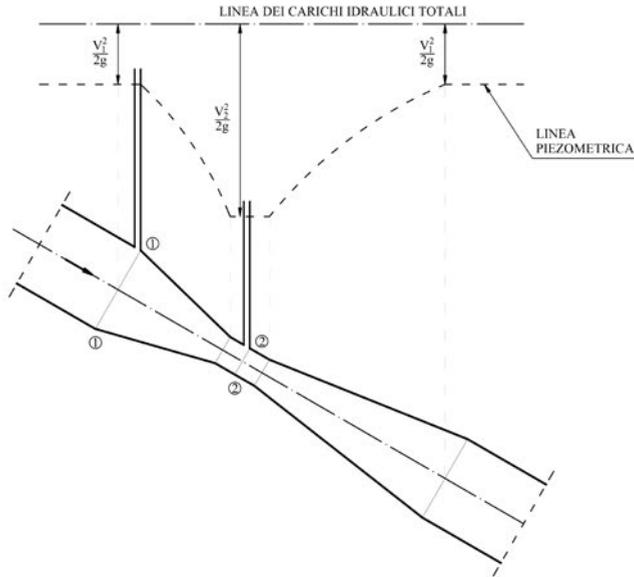


Figura 4.9: Schema di venturimetro in pressione.

Esprimendo, quindi, le velocità V_1 e V_2 in funzione della portata Q sulla base della menzionata equazione di continuità, l'Eq. (4.20) si può scrivere nella forma:

$$Q = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = k_A \sqrt{(h_1 - h_2)} \quad (4.21)$$

che correla la portata Q alla differenza di quota piezometrica $\Delta = h_1 - h_2$, essendo k_A un coefficiente legato alla geometria del dispositivo.

La verifica sperimentale dell'Eq. (4.21) indica la necessità di introdurre un coefficiente correttivo, k_V , per tenere conto delle (modeste) dissipazioni di energia fra le sezioni 1 e 2 e dell'andamento delle velocità locali in tali sezioni. Con maggiore aderenza alla realtà, l'Eq. (4.21) deve quindi scriversi nella forma:

$$Q = K_V \sqrt{\Delta} \quad (4.22)$$

in cui $K_V = k_A k_V$, con il coefficiente K_V , da ricavare mediante taratura di laboratorio. Ben diverso, rispetto a quello conseguente all'applicazione del teorema di Bernoulli, è invece il fenomeno a valle del tronchetto di diametro d . In questo, infatti, si verificano non trascurabili dissipazioni di energia dovute alla decelerazione della corrente. Ciò comporta che in tale tratto la linea dei carichi idraulici totali non è assolutamente orizzontale come invece indicato in Fig. 4.9 avendo assunto valido il teorema di Bernoulli anche nel tratto divergente.

Facendo riferimento al venturimetro come ad uno strumento di misura della portata, è evidente il suo carattere di strumento *intrusivo*: il forzato incremento di velocità, ottenuto riducendo la sezione idrica, determina quella variazione – di segno opposto – della quota piezometrica la cui lettura fornisce la misura della portata.

Riferimenti bibliografici

Citrini, D., Nosedà, G. (2009). *Idraulica*. Casa Editrice Ambrosiana, Milano.

De Marchi, G. (1986). *Idraulica. Basi scientifiche e applicazioni tecniche*. Editore Ulrico Hoepli, Milano.

Gallati, M. e Sibilla, S. (2009). *Fondamenti di Idraulica*. Carocci Editore, Roma.

Ghetti, A. (1984). *Idraulica*. Edizione Libreria Cortina, Padova.

Pulci Doria, G. (1987). *Il corso di Idraulica a partire dallo sviluppo storico-sociale della disciplina*. Vol. I, Cooperativa Universitaria Editrice Napoletana (CUEN), Napoli.

Pulci Doria, G., Ciaravino, G., De Marinis, G., Giugni, M., e Sabatino, C. (1988). *Il corso di Idraulica a partire dallo sviluppo storico-sociale della disciplina*. Vol. IV, Cooperativa Universitaria Editrice Napoletana (CUEN), Napoli.

Scimemi, E. (1964). *Compendio di Idraulica*. Casa Editrice CEDAM, Padova.

Esercizi proposti

Esercizio 4.1

Sul fondo del serbatoio di Fig. 4.10 è praticata una luce a battente a spigolo vivo di forma circolare avente diametro, D , pari a 0.1 m. Nell'ipotesi di processo stazionario (che, cioè, la quota del pelo libero rimanga costante), e assumendo per il coefficiente di efflusso della luce, C_d , il valore 0.60, calcolare la portata effluente dalla luce, Q_ℓ , per valori del battente, h , compresi fra 0.1 e 5 m. Commentare, quindi, i risultati ottenuti.

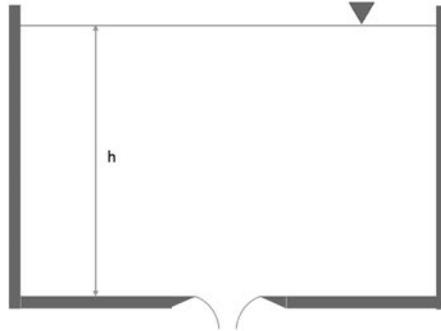


Figura 4.10: Serbatoio con luce di fondo circolare.

Esercizio 4.2

La giunzione, schematizzata in Fig. 4.11, giacente su un piano orizzontale, è costituita da tre tubazioni in pressione di diametro $D_1 = D_2 = 7,5$ mm e $D_3 = 5$ mm. Sono stati misurati il valore della pressione e della velocità media nella tubazione 1, immediatamente prima della giunzione, p_1/γ_w ($= 10$ m) e V_1 ($= 1.0$ m/s) e quello della velocità media, V_2 ($= 0.4$ m/s) nella tubazione 2 a valle della giunzione. Nell'ipotesi di fluido perfetto, si determinino i valori della pressione p_2 e p_3 e quello della velocità V_3 .

Esercizio 4.3

Il venturimetro riportato in Figura 4.12, con $d = 100$ mm, è installato in una tubazione di diametro $D = 200$ mm, nella quale defluisce acqua. Determinare il valore della portata defluente, Q , per valori della lettura al manometro differenziale a mercurio, Δ , compresi fra 5 cm e 30 cm (per il peso specifico dell'acqua e del mercurio si assumano, rispettivamente, i valori $\gamma_w = 9810$ N/m³ e $\gamma_m = 133000$ N/m³). Si costruisca, quindi, il diagramma (Δ , Q) la cosiddetta *scala di deflusso* del venturimetro.

Esercizio 4.4

Un serbatoio di grandi dimensioni contiene acqua – con un tirante $h = 5$ m – e aria in pressione ($p_{aria} = 1$ bar). Al serbatoio è collegato un erogatore secondo lo schema di Fig. 4.13.

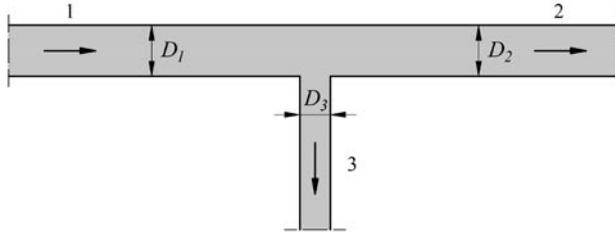


Figura 4.11: Schema di giunzione in una condotta in pressione.

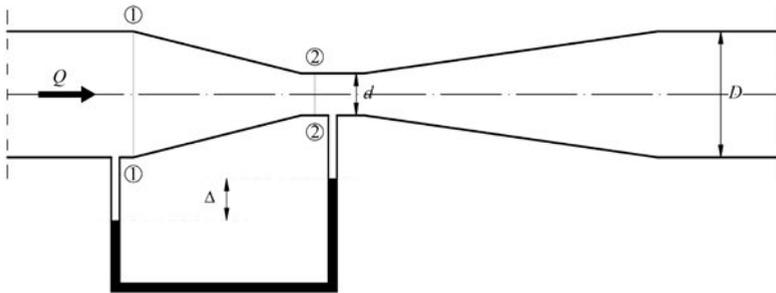


Figura 4.12: Schema di venturimetro.

Nell'ipotesi di fluido perfetto, si determini l'altezza (massima), h_{max} , rispetto al fondo del serbatoio, che il getto emesso dall'erogatore può raggiungere.

Esercizio 4.5

Un sifone di breve lunghezza (Fig. 4.14) è alimentato da un serbatoio di grandi dimensioni, contenente acqua alla temperatura di 15°C .

Nell'ipotesi di fluido perfetto, si calcoli il valore della velocità allo sbocco, V_C , e quello della pressione nelle sezioni A e B allorché risulti: $a = 1.2\text{ m}$ e $b = 2.4\text{ m}$. Si individuino, quindi, le condizioni critiche di funzionamento del sifone.

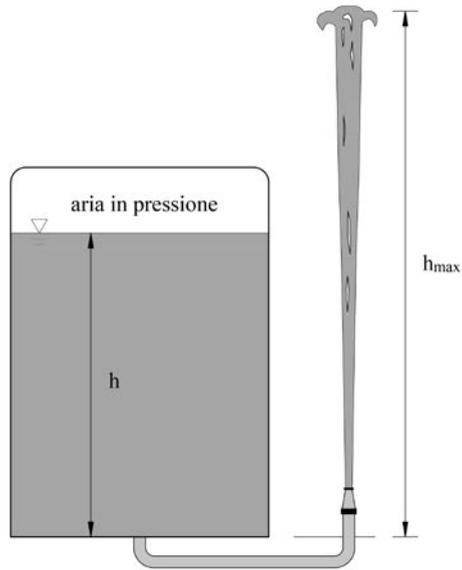


Figura 4.13: Serbatoio in pressione con erogatore al fondo.

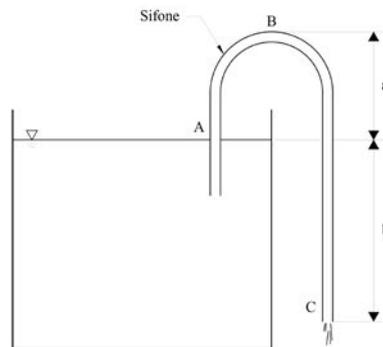


Figura 4.14: Breve sifone alimentato da un serbatoio.

Capitolo 5

Moto uniforme laminare e turbolento

5.1 Moto laminare e turbolento

In questo capitolo si farà riferimento ai fluidi Newtoniani, nei quali cioè, secondo l'Eq. (1.5), il modulo dello sforzo tangenziale viscoso è dato dalla relazione:

$$\tau_v = \mu \frac{dv}{dn}$$

Lo sforzo tangenziale viscoso, τ_v , è quindi direttamente proporzionale al gradiente di velocità, dv/dn , con la viscosità dinamica, μ , quale coefficiente di proporzionalità. Seppure siano in generale piccoli rispetto alla pressione (ossia agli sforzi normali), il ruolo degli sforzi tangenziali è importante per comprendere il comportamento dei fluidi in quanto essi rappresentano l'azione resistente al moto.

L'equazione di Newton esprime però l'intero sforzo tangenziale solo in un limitato campo di condizioni di moto, confrontabili con quelle che si stabiliscono in un viscosimetro: basse velocità unite a modeste dimensioni del campo di moto (nel caso del viscosimetro, ciò equivale a dire, piccoli valori dello spessore dell'intercapedine fra i due cilindri). Tale regime di moto, come risulterà chiaro dal confronto con uno completamente differente (quello *turbolento*), viene definito *laminare* o *regolare*.

Per meglio comprendere l'instaurarsi di differenti regimi di moto, si faccia riferimento, a titolo di esempio, al moto stazionario in una condotta in pressione, rettilinea e di sezione circolare. Considerando l'entità dei legami esistenti fra le particelle fluide (senz'altro minori rispetto a quelle che costituiscono un solido), è difficile immaginare che esse si muovano sempre *ordinatamente* con velocità parallela all'asse della tubazione, indipendentemente dal valore della velocità. Piuttosto, è plausibile che, a partire da determinati valori della velocità, nel corso del moto le particelle occupino posizioni le più diverse, apparentemente *casuali*. Ciò comporta che le particelle più lente, allorché giungono in una zona caratterizzata da un valore maggiore della velocità (ciò accade quando esse si spostano verso l'asse della condotta), risultano accelerate dalle più veloci particelle circostanti. Al contrario, le particelle più veloci, allorché pervengono in una zona in cui la velocità è minore (ossia quando si spostano verso la parete della condotta), subiscono una decelerazione, sempre per effetto dell'interazione con le particelle vicine.

Questi fenomeni di interazione fra le particelle determinano, nel complesso, un incremento delle forze resistenti al moto e, quindi, degli sforzi tangenziali. Tali componenti aggiuntive degli sforzi tangenziali prendono il nome di *sforzi alla Reynolds* e il regime di moto si definisce *turbolento*.

Un esempio utile a comprendere il carattere del moto turbolento fu proposto da Theodore von Kármán che lo paragonò al moto di un gregge di pecore. Un osservatore a distanza vede infatti il gregge muoversi animato nel complesso da una certa velocità, detta *di trasporto* (assimilabile alla velocità media, V , di una corrente). Osservando però più nel dettaglio il moto del gregge, l'osservatore noterebbe che le traiettorie delle singole pecore sono assolutamente *qualsiasi* e che frequenti sono le collisioni fra di esse. Per effetto di tali collisioni, le pecore più lente sono *trascinate* da quelle più veloci e viceversa quelle più veloci sono *rallentate* dall'interazione con quelle più lente. Il risultato globale di tali azioni di disturbo fra le pecore è comunque un rallentamento del gregge nel suo complesso.

Il carattere aleatorio della velocità in un punto di una corrente in regime turbolento (Fig. 5.1), può essere espresso considerando, mediante la tecnica delle cosiddette *medie temporali alla Reynolds*, il valore istantaneo della velocità locale – e quindi quello delle sue componenti u , v e w – come somma di un valore medio nel tempo e di una *componente di agitazione*:

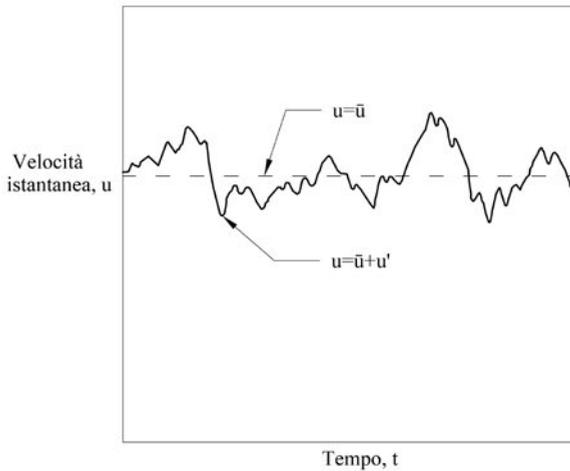


Figura 5.1: Tipico andamento nel tempo della componente istantanea, u , della velocità in un regime turbolento e definizione del valore medio, \bar{u} .

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ w &= \bar{w} + w' \end{aligned} \tag{5.1}$$

in cui le componenti medie \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} sono definite dalle relazioni:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} u dt \\ \bar{v} &= \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} v dt \\ \bar{w} &= \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} w dt \end{aligned} \tag{5.2}$$

in cui l'intervallo di tempo Θ , caratteristico del fenomeno esaminato, è tale che per le componenti di agitazione u' , v' , e w' risulti:

$$\begin{aligned} \int_0^\Theta u' dt &= 0 \\ \int_0^\Theta v' dt &= 0 \\ \int_0^\Theta w' dt &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

È opportuno precisare che, in analogia con il significato della velocità media V (che non rappresenta la velocità di una specifica particella), le componenti medie \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} potrebbero non corrispondere mai a quelli reali delle componenti della velocità.

Per considerare il menzionato incremento delle resistenze al moto dovuto alla turbolenza, il modulo dello sforzo tangenziale complessivo, τ , può essere espresso come somma di una componente viscosa e di una turbolenta:

$$\tau = \tau_v + \tau_t = (\mu + \eta) \frac{dv}{dn} \quad (5.4)$$

ipotizzando l'esistenza della cosiddetta *eddy viscosity*, η , che, a differenza del coefficiente di viscosità dinamica, μ , non è una proprietà del fluido ma dipende dalle caratteristiche del moto (ad esempio, dalla distanza dalla parete).

Le differenze sopra descritte fra i regimi laminare e turbolento si riverberano anche nell'andamento della velocità locale lungo il diametro della condotta – il cosiddetto *profilo di velocità* – come evidenziato in Fig. 5.2, nella quale D e r indicano, rispettivamente, il diametro interno e la distanza dall'asse della condotta. La minore variabilità della velocità che caratterizza il regime turbolento rispetto a quello laminare deriva proprio dal descritto processo di *mescolamento*, con conseguente *ridistribuzione* delle velocità, provocato dall'agitazione turbolenta. L'effetto della turbolenza, quindi, in termini di andamento del profilo di velocità, è quello di uniformarlo rispetto a quello che si stabilirebbe se il regime fosse laminare.

L'aver descritto le caratteristiche del profilo di velocità in una corrente liquida, consente di precisare il concetto di *moto uniforme* rispetto a quello valido per i corpi rigidi. In un corpo rigido in moto, per l'intensità dei legami esistenti fra le particelle, queste hanno tutte la medesima velocità. Nel caso, invece, di una corrente che defluisce in un involucro – ad esempio, in una tubazione – per la condizione di aderenza si determinano inevitabilmente dei gradienti di velocità. Ciò comporta che le particelle sono tutte caratterizzate da velocità differenti e non è mai possibile un moto uniforme nella medesima accezione valida per i corpi rigidi. Nel caso delle correnti liquide è quindi necessaria una differente definizione. Precisamente, un moto stazionario si può definire *uniforme* se in tutti i punti corrispondenti di sezioni successive la velocità locale – il suo valore medio nel caso di regime turbolento – assume lo stesso valore. A tale riguardo, in Fig. 5.3, è evidenziato che in moto uniforme la componente assiale della velocità assume i medesimi valori – ad esempio, u_1 e u_2 – in due generici punti appartenenti a due sezioni successive.

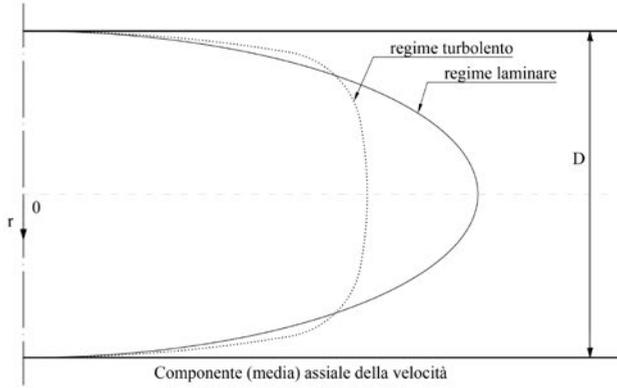


Figura 5.2: Profili di velocità in regime laminare e turbolento.

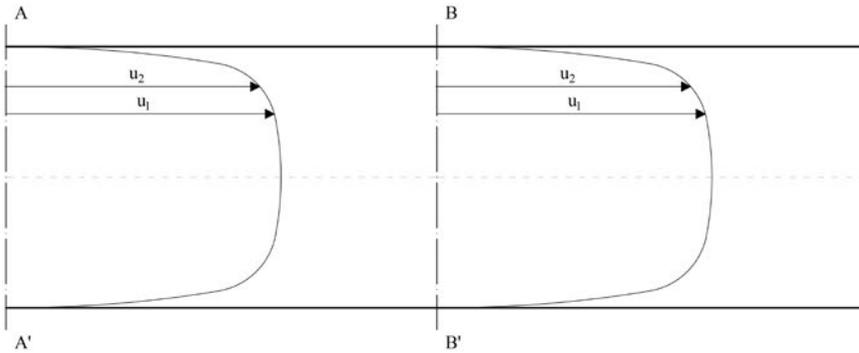


Figura 5.3: Definizione di moto uniforme per una corrente (turbolenta): in ciascun punto di due sezioni successive, il valore della velocità (media) locale è lo stesso.

5.1.1 Le esperienze di Reynolds

Le considerazioni sopra riportate in relazione ai differenti caratteri del regime laminare rispetto a quello turbolento si basano anche sui risultati delle fondamentali esperienze eseguite da Osborne Reynolds alla fine del XIX secolo.

Le prove effettuate da Reynolds consistevano nel far defluire acqua limpida con una velocità via via crescente in una tubazione in vetro nella cui sezione iniziale veniva inserito un getto di acqua intensamente colorata, in direzione parallela a quella delle generatrici della tubazione (Figg. 5.4 e 5.5).

In corrispondenza dei valori più piccoli della velocità, il filetto fluido colorato si manteneva

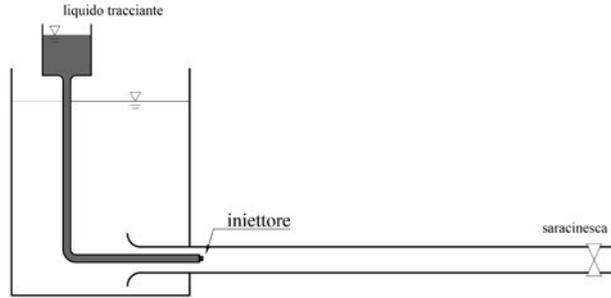


Figura 5.4: Schema dell'installazione sperimentale utilizzata da O. Reynolds.

assolutamente indipendente dagli altri (Fig. 5.4a). Al crescere della velocità esso incominciava invece ad oscillare e a vibrare (Fig. 5.4b); il suo percorso, per quanto irregolare e mutevole, rimaneva comunque distinto dalla corrente circostante. Un ulteriore aumento della velocità comportava un progressivo incremento della sezione di quello che all'imbocco della tubazione era un sottilissimo filetto colorato fino a determinare, più avanti, la completa dispersione del colorante in tutta la corrente (Fig. 5.4c). Nella Fig. 5.6 sono riportati dei particolari dei filetti fluidi (filamenti) nei tre regimi di moto.

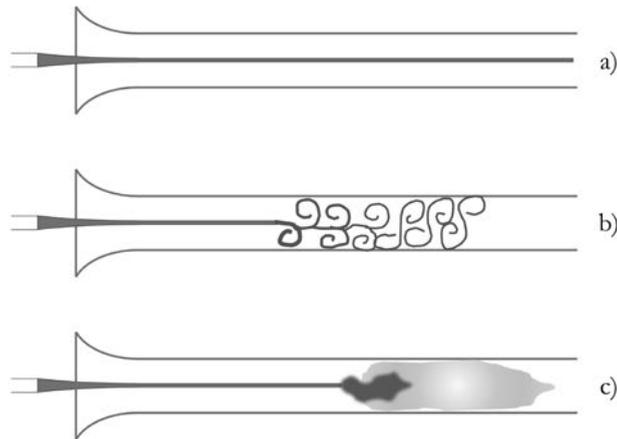


Figura 5.5: Esperienza di O. Reynolds. Andamento del filamento colorato in: a) regime laminare; b) regime di transizione laminare-turbolento e c) regime turbolento.

Sulla base di quanto anticipato, è facile riconoscere nelle condizioni di moto nelle quali il filetto fluido colorato si manteneva rettilineo e stabile, il regime *laminare* e in quelle caratterizzate da una completa dispersione del colorante, il regime *turbolento*. Le condizioni di moto caratterizzate dall'oscillazione del filetto di colorante possono essere invece attribuite ad un regime di *transizione laminare-turbolento* (*natura non facit saltus*).

Da un punto di vista cinematico, si può affermare che fino a quando il filetto colorato si mantiene integro e parallelo all'asse del tubo, ogni filetto fluido costituente la corrente è caratterizzato

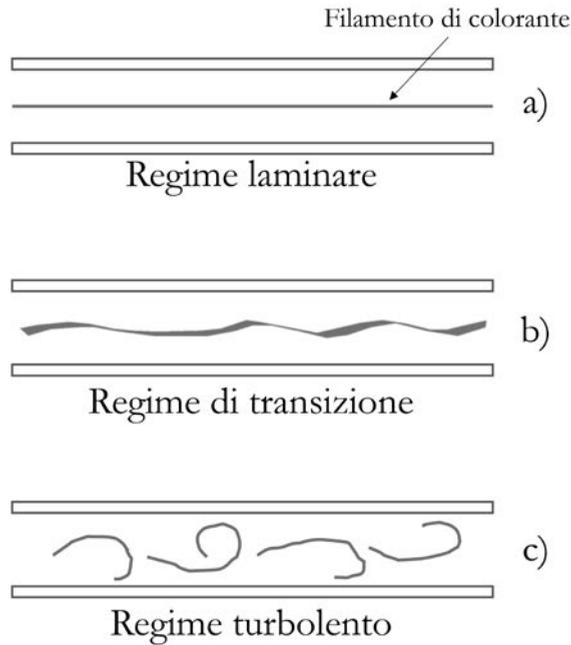


Figura 5.6: Esperienza di O. Reynolds. Particolare dell'andamento del filamento colorato in: a) regime laminare; b) regime di transizione laminare-turbolento e c) regime turbolento.

unicamente da una velocità, parallela all'asse del tubo, che determina il passaggio dell'acqua attraverso le successive sezioni (la già definita *velocità di trasporto*). Nelle condizioni di moto nelle quali si verifica la completa dispersione del colorante, invece, alla velocità di trasporto si sovrappongono evidentemente le componenti di *agitazione turbolenta* u' , v' e w' di cui alle Eqq. (5.4).

Le condizioni di esistenza dei regimi laminare, di transizione e turbolento furono quindi individuate non sulla base del valore della velocità media, V , ma di quello di un particolare numero di Reynolds – di struttura quindi riconducibile all'Eq. (1.17) – avendo identificato nel diametro interno, D , della tubazione la lunghezza caratteristica del fenomeno (ℓ), e nella velocità media di portata, V , la velocità caratteristica (v):

$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

In particolare, il regime laminare è stabile finché $Re < 2000$, turbolento per $Re > 4000$ e di *transizione* nell'intervallo $2000 < Re < 4000$.

5.2 L'abaco di Moody

Le descritte differenti caratteristiche dei possibili regimi di moto uniforme, hanno un diretto effetto sulle connesse dissipazioni di energia, ossia sul valore della perdita di carico per unità di peso defluente e di percorso, J , definita dall'Eq. (3.29):

$$E_1 - E_2 = \Delta E_{1-2} = \int_1^2 J(s) ds$$

È opportuno precisare che in condizioni di moto uniforme, poiché $V_1 = V_2$, risulta:

$$E_1 - E_2 = h_1 - h_2 = JL_{1-2} \quad (5.5)$$

I risultati delle esperienze eseguite per individuare delle relazioni per il calcolo della J sono sintetizzati nell'abaco di Moody. Tale diagramma, di tipo bilogaritmico, evidenzia che, al variare del numero di Reynolds, Re – riportato sull'asse delle ascisse – cambia la struttura della relazione che consente di valutare il fattore di attrito, λ – riportato sull'asse delle ordinate – e definito dalla relazione proposta da Darcy-Weisbach:

$$J = \lambda \frac{V^2}{2gD} \quad (5.6)$$

ossia come il fattore di proporzionalità fra la J e il rapporto fra l'altezza cinetica (media) della corrente, $V^2/2g$, e il diametro interno della tubazione, D .

L'Eq.(5.6), che consente di determinare il valore di J sulla base del valore della velocità media e delle caratteristiche della tubazione, è un esempio delle cosiddette *formule di resistenza*. Possono altrettanto definirsi formule di resistenza anche le relazioni attraverso le quali si può calcolare il valore del fattore di attrito, ossia le relazioni aventi una struttura del tipo:

$$\lambda = f(Re, \varepsilon/D) \quad (5.7)$$

nella quale ε/D rappresenta la *scabrezza relativa*, essendo ε la *scabrezza equivalente in sabbia di Nikuradse*, indicata più semplicemente anche come *scabrezza assoluta*. Tale parametro porta in conto la rugosità della parete interna del tubo, ovvero l'insieme delle microimperfezioni geometriche, intrinseche o dovute alle lavorazioni meccaniche (a titolo di esempio, alcuni valori di ε sono riportati nella Fig. 5.7).

L'abaco di Moody consente quindi di individuare i menzionati regimi di moto uniforme associando a ciascuno di essi l'appropriata formula di resistenza per il calcolo di λ . Fra le numerose disponibili in letteratura, anche considerando le applicazioni di seguito proposte, si farà in particolare riferimento alle seguenti relazioni:

- Regime laminare ($Re < 2000$) - formula di Poiseuille:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (5.8)$$

- Regime di moto turbolento in tubi lisci - formula di Blasius:

$$\lambda = 0.316Re^{-0.25} \quad (5.9)$$

- Regime di moto turbolento di transizione e completamente sviluppato - formula di Swamee e Jain, che rappresenta un'eccellente approssimazione, in forma esplicita, della relazione proposta da Colebrook e White:

$$\lambda = \frac{0.25}{\left[\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (5.10)$$

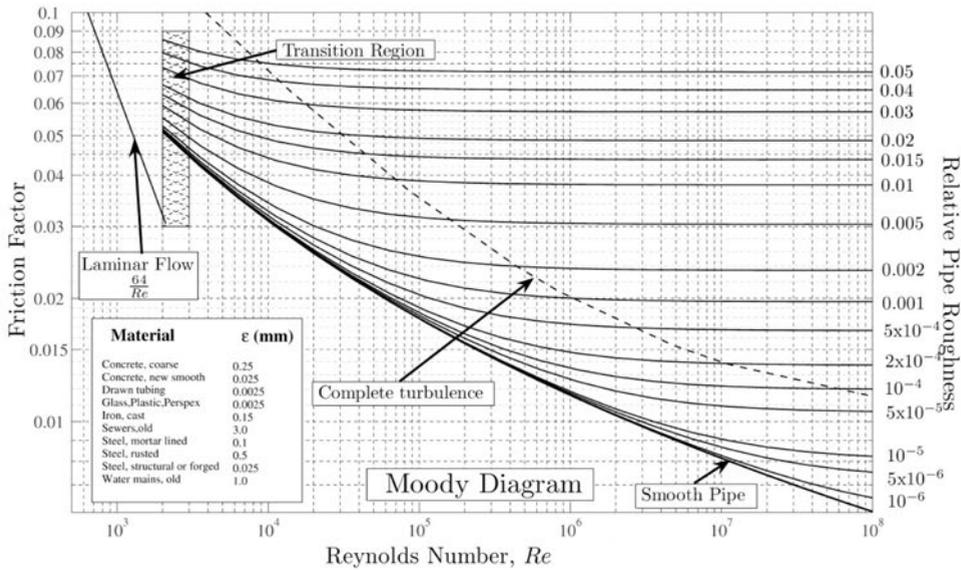


Figura 5.7: Abaco di Moody.

Per il regime di transizione laminare-turbolento non è invece disponibile una specifica formula di resistenza. Tali condizioni di moto, infatti, sono estremamente complesse essendo caratterizzate dal susseguirsi di tronchi di corrente in regime laminare e turbolento. Nell'abaco di Moody, l'andamento delle curve, di parametro ϵ/D , definite dall'Eq. (5.10), consente di distinguere nel regime turbolento due sottoregimi: quello *turbolento di transizione tubo liscio-tubo scabro* e quello *turbolento completamente sviluppato* o *turbolento di tubo scabro* a seconda del valore del numero di Reynolds. Precisamente, nel sottoregime turbolento di transizione tubo liscio-tubo scabro, λ dipende sia da Re sia da ϵ/D mentre in quello turbolento completamente sviluppato, λ dipende unicamente da ϵ/D e le curve si dispongono parallelamente all'asse delle ascisse.

Per evidenziare la condizione limite di esistenza del regime laminare in termini di velocità media, in Fig. 5.8 è riportato il valore assunto da V , al variare del diametro della tubazione, per $Re = 2000$ utilizzando l'Eq. (1.17) che definisce il numero di Reynolds. Tale diagramma indica chiaramente che il regime laminare può verificarsi solo in tubazioni di diametro molto piccolo. In corrispondenza dei diametri maggiori, infatti, in regime laminare la velocità è praticamente nulla.

A titolo di esempio, in Fig. 5.9 sono riportati i valori di J calcolati mediante l'Eq. (5.6), per $D = 100$ mm al variare del numero di Reynolds. Il valore del fattore d'attrito, λ , è calcolato tramite l'Eq. (5.8) nel caso di moto laminare ($Re < 2000$), mentre nel regime di moto turbolento si è assunta l'ipotesi di tubo idraulicamente liscio e, di conseguenza, λ è calcolato mediante l'Eq. (5.9).

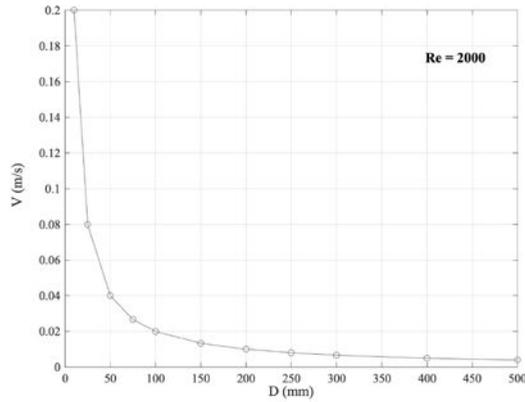


Figura 5.8: Valori assunti dalla velocità, V , al variare del diametro della tubazione, D , in corrispondenza del valore critico $Re = 2000$ (limite di esistenza del regime laminare).

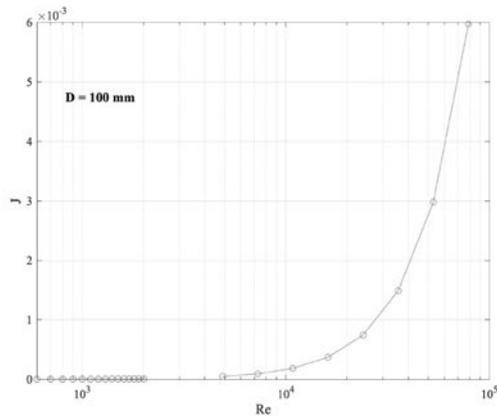


Figura 5.9: Valori assunti dalla cadente piezometrica, J , al variare del numero di Reynolds, Re , per un fissato valore del diametro, $D (= 100$ mm). I cerchietti blu indicano il regime di moto laminare, quelli rossi il regime di moto turbolento in tubi idraulicamente lisci.

Riferimenti bibliografici

Puppini, U. (1947). *Idraulica*. Nicola Zanichelli Editore, Bologna.

Vardy, A. (1990). *Fluid Principles*. McGraw-Hill International Series in Civil Engineering, London.

Esercizi proposti

Esercizio 5.1

Si consideri una condotta di sezione circolare di diametro $D = 100$ mm, in cui defluisce una portata $Q = 0.118$ L/s (si assuma per la temperatura dell'acqua il valore di 20°C). Si determini il regime di moto e si calcoli il valore del fattore d'attrito, individuando le condizioni idrodinamiche nell'abaco di Moody.

Svolgimento Determinato il valore della sezione idrica della condotta, $A (= 0.00785 \text{ m}^2)$, risulta $V = 0.015$ m/s. Per il numero di Reynolds si ottiene il valore 1502 che corrisponde ad una condizione di regime laminare.

Il fattore di attrito, fornito dall'Eq. (5.8), risulta quindi pari a 0.0426 (Fig. 5.10).

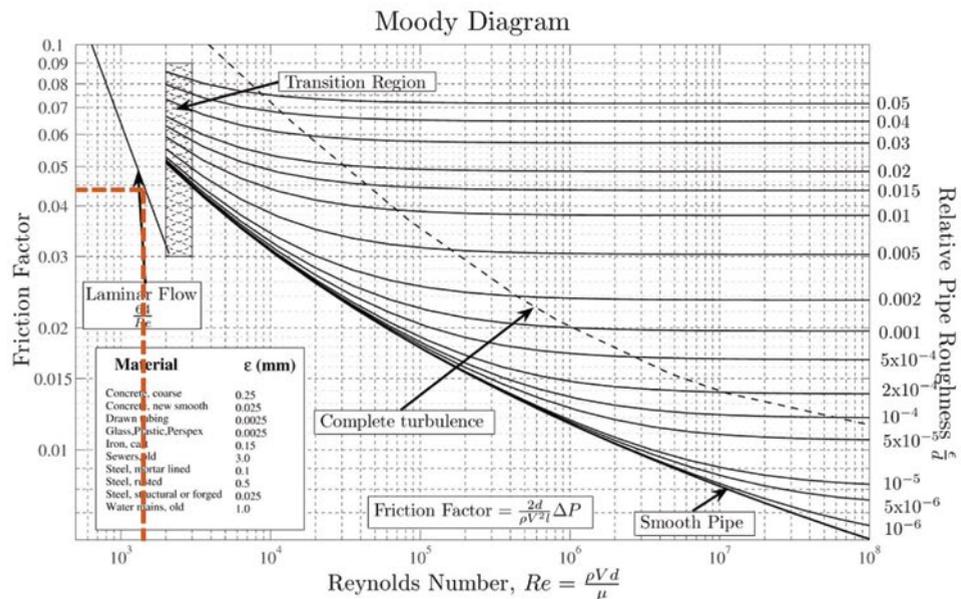


Figura 5.10: Esercizio 5.1: individuazione delle condizioni idrodinamiche.

Esercizio 5.2

Si consideri la stessa condotta dell'esercizio 5.1 nella quale però defluisca una portata maggiore ($= 10$ L/s).

Si determini il valore del fattore d'attrito sia nell'ipotesi di tubo liscio sia in quella di tubo scabro, assumendo in quest'ultimo caso per la scabrezza assoluta della tubazione, ϵ , i valori 0.1, 0.5 e 1 mm.

Svolgimento Nel caso in esame, si ottiene: $Re = 127324$, cui corrisponde un regime di moto turbolento.

Nell'ipotesi di tubo liscio, la formula di Blasius - Eq. (5.9) - fornisce $\lambda = 0.0167$, individuato nel grafico di Fig. 5.11 dal cerchietto rosso.

Nell'ipotesi di tubo scabro, si ottengono, rispettivamente, i seguenti valori di scabrezza relativa: 0.001, 0.005 e 0.01. Tali valori sono facilmente individuabili nella parte destra dell'abaco di Moody e consentono di individuare le relative curve.

La formula di Swamee e Jain – Eq. (5.10) – fornisce dunque i seguenti tre valori di λ : 0.0219, 0.0313 e 0.0386. Essi sono individuati in Fig. 5.11 dai cerchietti verdi, posti naturalmente sulla stessa verticale (la stessa anche del caso dei tubi lisci), in quanto sono riferiti allo stesso valore di Re ma a diverse condizioni di scabrezza relativa.

Si può notare che solo nel caso di scabrezza relativa pari a 0.01 il regime di moto risulta turbolento completamente sviluppato: ci si trova, cioè, "oltre" la linea tratteggiata che separa le regioni di moto turbolento di transizione e completamente sviluppato.

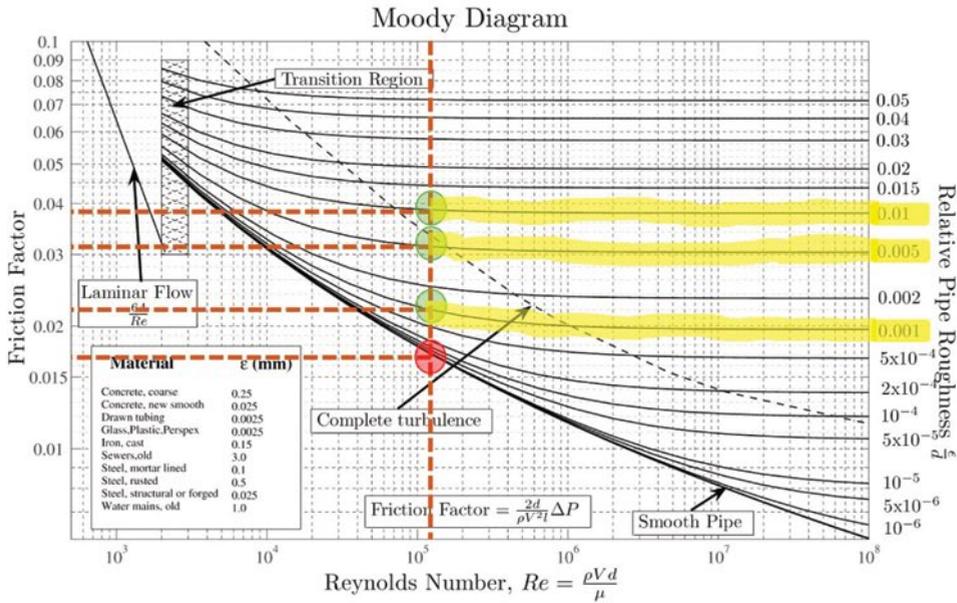


Figura 5.11: Esercizio 5.2: fattore d'attrito per $D = 100$ mm e $Q = 10$ L/s, per differenti valori della scabrezza della tubazione.

5.2.1 Esercizio 5.3

Si consideri una condotta di diametro significativamente maggiore rispetto agli esempi precedenti ($D = 500$ mm) e si determinino regime di moto e fattore d'attrito per $Q = 1$ L/s e 100 L/s. Per il caso di moto turbolento si considerino gli stessi valori di scabrezza dell'esercizio 5.2.

Svolgimento Nel caso in cui $Q = 1$ L/s, si ottiene $Re = 2546$. Nonostante il valore piuttosto basso della portata, che potrebbe far prevedere un moto laminare, si ricade, a causa del valore elevato del diametro, nella zona di transizione (Fig. 5.12), per la quale non sono disponibili formule di resistenza.

Nel caso in cui, invece, la portata assuma il valore di 100 L/s, si ottiene $Re = 254648$, cui corrisponde un regime turbolento.

Nell'ipotesi in cui il tubo risulti idraulicamente liscio, la formula di Blasius – Eq. (5.9) – fornisce $\lambda = 0.014$, individuato nel grafico di Fig. 5.13 dal cerchietto rosso.

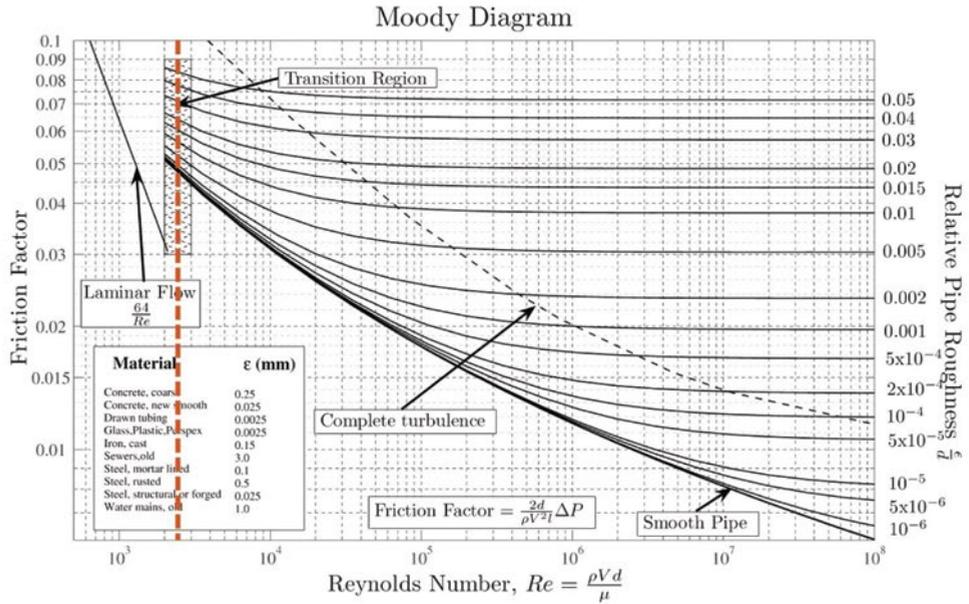


Figura 5.12: Esercizio 5.3: rappresentazione nell'abaco di Moody della condizione corrispondente a $Q = 1 \text{ L/s}$.

Nell'ipotesi di tubo scabro, considerando gli stessi valori di ϵ di cui all'esercizio 5.2, essendo il valore di D diverso, si ottengono i seguenti valori della scabrezza relativa, ϵ/D : $2 \cdot 10^{-4}$, 0.001 e 0.002.

La formula di Swamee e Jain – Eq. (5.10) – fornisce dunque i seguenti tre valori di λ : 0.0166, 0.0209 e 0.0243. Essi sono individuati in Fig. 5.13 dai cerchietti verdi, tutti ricadenti nella zona di moto turbolento di transizione.

Moody Diagram

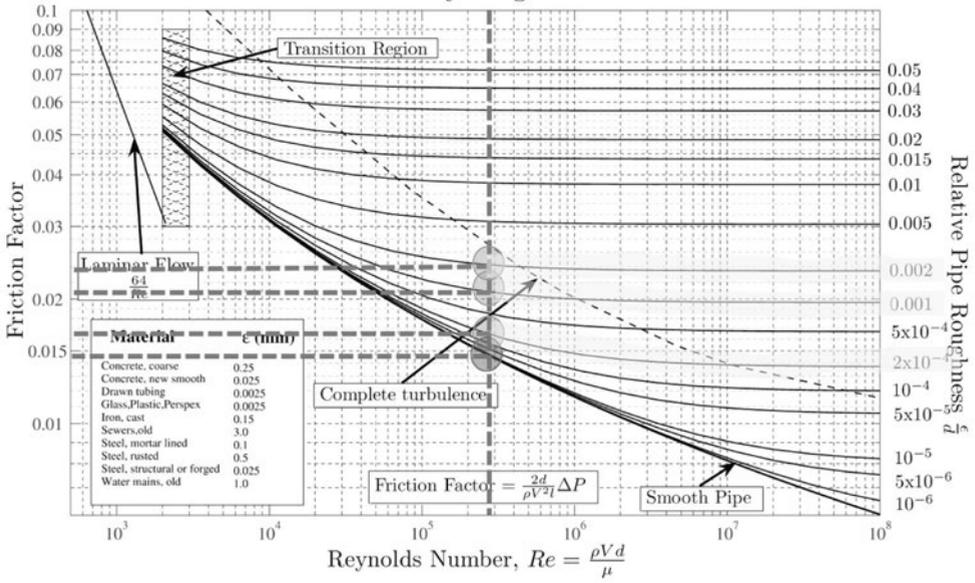


Figura 5.13: Esercizio 5.3: rappresentazione nell'abaco di Moody della condizione corrispondente a $Q = 100$ L/s.

Capitolo 6

Processi di moto nei mezzi porosi artificiali

6.1 Premessa

In un mezzo poroso, nel quale è possibile distinguere *matrice solida* e *pори*, il moto di un liquido avviene fra granello e granello. I pori comunicanti fra di loro, infatti, formano delle sottili vie di deflusso, assimilabili a tubicini/canalicoli di sezione trasversale molto piccola e dall'andamento estremamente irregolare. Le pareti di tali sottili e tortuosi tubi di flusso sono costituite, in parte, dalla superficie solida dei granelli e in parte dal liquido adeso agli stessi. Può però avvenire che il poro sia talmente piccolo che, prevalendo le forze di adesione del liquido ai granelli, quest'ultimo vi ristagni.

L'estrema irregolarità dei percorsi seguiti dal liquido in un mezzo poroso rende estremamente difficile un'analisi di dettaglio del campo di moto anche nel caso, cui in questa sede si farà specifico riferimento, dei mezzi porosi *artificiali* quelli, cioè, che costituiscono i filtri. La determinazione del valore locale della velocità e della pressione nei pori è addirittura improponibile nei mezzi porosi *naturali* quali il *suolo* – ossia lo spessore superficiale della superficie terrestre – e le falde – ossia i corpi idrici profondi. Rispetto a quelli artificiali, i mezzi porosi naturali sono infatti caratterizzati da un'estrema eterogeneità non solo per quanto riguarda la forma e la dimensione dei granelli ma anche le loro caratteristiche meccaniche e chimiche. Queste ultime, in particolare, determinano la natura dei fenomeni di interazione fra i singoli granelli e il liquido circostante. Un'ulteriore complicazione è rappresentata dal fatto che, in dipendenza delle condizioni al contorno, i pori possono essere solo parzialmente pieni di liquido, cioè *non saturi*. In base al valore del contenuto d'acqua – minore o uguale a quello cui corrisponde la saturazione – si definiscono *processi di infiltrazione* quelli in un mezzo poroso non saturo e *moti di filtrazione* quelli che si verificano in un mezzo poroso saturo. Con riferimento ai mezzi porosi naturali, i processi di infiltrazione, con andamento sostanzialmente verticale, interessano il suolo mentre i moti di filtrazione, con andamento prevalentemente orizzontale, le falde.

Per i motivi sopra menzionati, l'approccio per lo studio sia dei moti di filtrazione sia dei processi di infiltrazione è quindi necessariamente di carattere *globale*. Pur mantenendo l'approccio tipico dell'analisi dei processi di moto nei mezzi continui, esso prevede l'introduzione di grandezze *fittizie* quali, ad esempio, la *velocità di filtrazione* proposta da H. Darcy intorno alla metà del XIX secolo. Rilevante nello studio del moto nei mezzi porosi è, inoltre, il ricorso alla sperimentazione sia di laboratorio – per i mezzi porosi artificiali – sia di campo, per quelli

naturali per la loro *caratterizzazione idraulica*.

Come anticipato, nel prosieguo di questo capitolo, in accordo con le finalità del corso, l'attenzione verrà focalizzata sui moti di filtrazione in mezzi porosi artificiali (filtri).

6.2 La legge di Darcy della filtrazione

L'apparato sperimentale utilizzato da Darcy può essere ricondotto a quello schematizzato in Fig. 6.1. Esso consiste in un cilindro di sezione trasversale A riempito di materiale incoerente nel quale defluisce una portata costante, Q . Per evitare il dilavamento del materiale, in corrispondenza delle due basi del cilindro sono inserite delle piastre porose. All'interno del cilindro, ad una distanza relativa ΔL , sono installati due piezometri che consentono di misurare la differenza di quota piezometrica, Δh , associata al deflusso della portata, Q , misurata, ad esempio, con il metodo volumetrico.

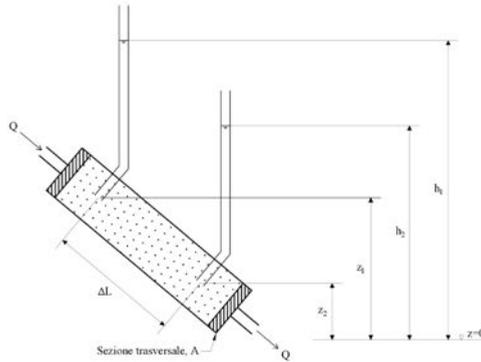


Figura 6.1: Installazione sperimentale per la determinazione della portata defluente in un filtro di materiale poroso.

I risultati delle prove eseguite mostrarono l'esistenza di una diretta proporzionalità fra la portata Q e il relativo Δh espressa dalla relazione:

$$Q = -AK_f \frac{h_1 - h_2}{\Delta L} = -AK_f \frac{\Delta h}{\Delta L} = -AK_f J \quad (6.1)$$

definita *legge di Darcy della filtrazione*, essendo J la cadente piezometrica. Nell'Eq.(6.1), il segno meno indica che il moto avviene fra la sezione a quota piezometrica maggiore, h_1 , e quella a quota piezometrica minore, h_2 , e K_f rappresenta il *coefficiente di filtrazione* o *coefficiente di permeabilità*. L'Eq. (6.1), che costituisce a tutti gli effetti la *legge di resistenza* del mezzo poroso considerato, definisce la cosiddetta *velocità di filtrazione*:

$$q = \frac{Q}{A} = -K_f J \quad (6.2)$$

quale rapporto fra la portata e la sezione trasversale del filtro comprensiva sia dei vuoti (pori) sia dei pieni (granelli). Per tale motivo, q non rappresenta l'effettiva velocità del fluido nei pori bensì una velocità *fittizia*. Un valore più prossimo alla reale velocità del liquido, si ottiene dividendo q per la porosità del mezzo, n :

$$q_m = \frac{q}{n} \quad (6.3)$$

Pur essendo necessaria una specifica determinazione della porosità, per valutazioni preliminari si può assumere che n vari fra 0.30 e 0.40. Con riferimento a sabbie di media granulometria, per la velocità di filtrazione q si ottengono valori massimi dell'ordine del centimetro al secondo, cui corrispondono per q_m valori dell'ordine del decimetro al secondo. A tali modeste velocità corrispondono trascurabili valori dell'altezza cinetica. Ciò comporta che nei moti di filtrazione il carico idraulico totale coincida praticamente con la quota piezometrica.

Al fine di comprendere il significato del coefficiente di filtrazione, K_f , e i limiti di validità dell'Eq. (6.2), è opportuno confrontare quest'ultima, quale legge di resistenza, con quella valida per il moto uniforme in regime laminare:

$$V = \frac{gD^2}{32\nu} J \quad (6.4)$$

ottenuta combinando l'Eq. (5.8) proposta da Poiseuille:

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

con quella di Darcy-Weisbach – Eq.(5.6):

$$J = \lambda \frac{V^2}{2gD}$$

Dal confronto fra le Eqq. (6.2) e (6.4) emerge che, a seguito dei modesti valori sia della velocità del fluido sia delle dimensioni dei pori – e, quindi, dei *tubicini* nei quali defluisce il liquido – i moti di filtrazione si sviluppano in regime laminare. Per questo motivo, il valore del coefficiente di filtrazione dipende sia dalle caratteristiche del mezzo poroso sia da quelle del liquido e, quindi, dal valore della temperatura.

Esperienze eseguite successivamente hanno però mostrato che, all'aumentare di q e/o della granulometria – e, quindi, delle dimensioni dei pori – i risultati delle prove non rispettavano più l'Eq. (6.2). Tale comportamento è stato spiegato sulla base del valore assunto da un particolare numero di Reynolds – di struttura quindi riconducibile all'Eq. (1.17) – avendo identificato nel diametro del granello, d_s , nel caso di mezzo poroso omogeneo (ovvero il diametro medio nel caso di un miscuglio) la lunghezza caratteristica del fenomeno (ℓ), e nella velocità di filtrazione, q , la velocità caratteristica (v):

$$Re_g = \frac{qd_s}{\nu} \quad (6.5)$$

essendo Re_g il *numero di Reynolds della filtrazione*. Per via sperimentale è stata quindi stabilita la seguente condizione limite di validità della legge di Darcy – Eq.(6.2):

$$Re_g \leq 10 \quad (6.6)$$

Per valori di Re_g superiori al valore critico (= 10), il legame diviene di tipo quadratico (Fig. 6.2):

$$q = \frac{Q}{A} = -K_f \sqrt{J} \quad (6.7)$$

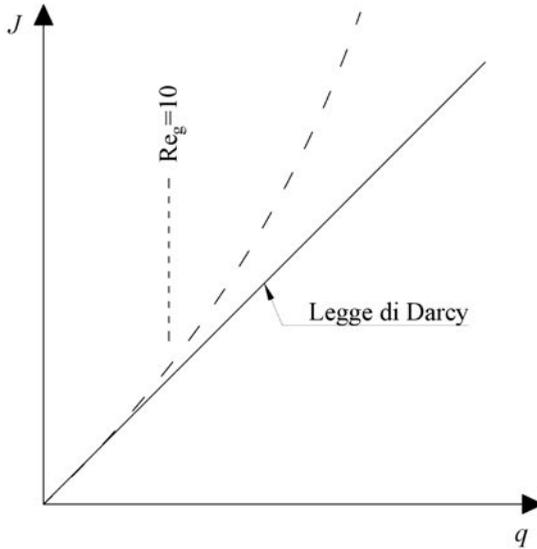


Figura 6.2: Legame fra la velocità di filtrazione, q , e la cadente piezometrica, J , in dipendenza del regime di moto.

che corrisponde all'instaurarsi nel mezzo poroso di un regime di moto turbolento.

Il valore del coefficiente di filtrazione K_f deve essere ottenuto sperimentalmente utilizzando un dispositivo, detto *permeometro*, sostanzialmente analogo a quello di Fig. 6.1.

6.3 Una gustosa applicazione della legge di Darcy

Nella preparazione del caffè – una delle bevande più diffuse al mondo (probabilmente la più amata in Italia) – nella sua versione *classica*, ossia non contaminata da orpelli e inutili complicazioni¹, la *moka* gioca un ruolo assolutamente fondamentale.

Ideata negli anni trenta del '900 dall'ingegnere piemontese Alfonso Bialetti, la moka² (Fig. 6.3) trasforma il caffè macinato (Fig. 6.4 in una bevanda che, però, può risultare molto diversa a seconda della procedura seguita e dei *materiali* utilizzati.

Le principali fasi della preparazione del caffè utilizzando la moka sono:

- riempire il serbatoio con acqua,
- caricare il filtro con la miscela di caffè,
- portare l'acqua all'ebollizione,

¹Opinione strettamente personale del primo degli scriventi: *tutti i gusti sono gusti...*

²Il nome fu scelto in onore della città Mokha, antico porto dello Yemen, in quanto maggior mercato del caffè dal XV al XVII secolo di una qualità di caffè molto apprezzata anche per il forte profumo di cioccolato. Il materiale utilizzato, l'alluminio, era molto sponsorizzato durante il ventennio fascista in quanto non solo leggero e resistente ma anche in sintonia con lo spirito di modernità introdotto dal Futurismo. Un ulteriore elemento di novità della moka fu anche la *tambureggiante*, almeno per l'epoca (fine anni '50 - anni '60), campagna pubblicitaria caratterizzata dal celebre *omino coi baffi* – una caricatura di Renato Bialetti, figlio di Alfonso – e dallo slogan *Eh si si si... sembra facile! (fare un buon caffè)!*

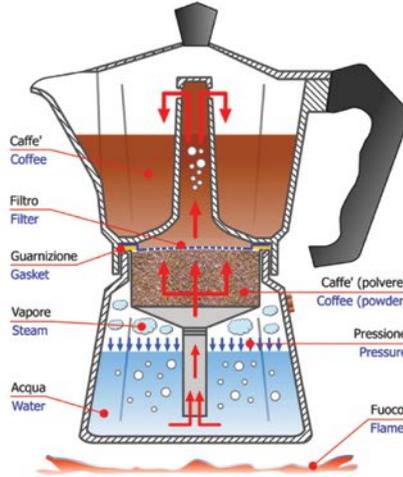


Figura 6.3: Schema di moka con indicazione dei principali componenti (Fonte: marcodepisapia.com).



Figura 6.4: Una tipica miscela di caffè pronta per l'uso (Fonte: viverepiusani.it).

- attendere la fuoriuscita del caffè.

Rimandando ad altri testi la discussione sulle prime tre fasi³, la fuoriuscita del caffè è senz'altro regolata dalla legge di Darcy della filtrazione. Essa infatti avviene per effetto della differenza di pressione, Δp^4 , esistente fra la superficie inferiore del filtro – investito dal vapore – e quella superiore – a pressione atmosferica. Il moto di filtrazione determinato da Δp consente all'acqua di contaminarsi con il caffè assorbendone l'aroma. Le migliori prestazioni della moka – in termini soprattutto di rapidità di produzione del caffè e di mantenimento di un'adeguata temperatura – la facero rapidamente prevalere sulla classica *napoletana* nella quale la filtrazione, essendo determinata unicamente dalla forza di gravità, risultava molto più lenta (forse *troppo* lenta...).

Rispetto alle esperienze eseguite da Darcy, l'unica differenza sta quindi nel mezzo poroso

³ Si può disquisire all'infinito sul ruolo dell'acqua – leggendarie sono (forse è meglio dire *sarebbero*) al riguardo le qualità dell'acqua del Serino – su quello della provenienza del caffè (molto celebrato, ad esempio, è il *caffè di montagna*), sul tipo di tostatura ma anche, passando ad infinitesimi di ordine forse superiore, sulla quota sul livello del mare che influenza la temperatura di ebollizione,...

⁴ È lecito trascurare la differenza di quota geodetica fra le estremità del filtro per il modesto spessore di questo.

contenuto nel filtro: caffè macinato invece di sabbia o ghiaia sottile. Gli altri fattori, invece, hanno sostanzialmente lo stesso ruolo. In particolare, a parità di Δp , sono importanti:

- la granulometria della miscela,
- la sezione del filtro,
- la lunghezza del filtro,
- la viscosità dell'acqua (ν , quindi, la sua temperatura).

Fondamentale, ai fini della qualità del caffè, è senz'altro il ruolo del tempo di contatto, T_c , fra l'acqua che filtra e la miscela (si veda, ad esempio: www.marcodepisapia.com). Maggiore è T_c – ovviamente nei limiti di una durata accettabile – più forte sarà il caffè. Ovvero, più velocemente filtra l'acqua, più leggera sarà la bevanda in tazza.

A parità degli altri fattori, la velocità di filtrazione dipende dalla granulometria del macinato: più piccoli sono i pori, minore risulterà il valore del coefficiente di filtrazione del caffè, K_{fc} . Nella preparazione del caffè all'americana – per alcuni una “ciofecca” – la granulometria deve essere maggiore rispetto al caffè utilizzato nella moka e il risultato è un caffè più leggero. Un'eccessiva compattazione del caffè determina, al contrario, un aumento della temperatura dell'acqua contenuta nella moka e il caffè può acquistare un sapore di bruciato.

Per una data moka, in definitiva, la sperimentazione rappresenta – come sempre per i moti di filtrazione – un fattore essenziale per raggiungere il risultato desiderato dal proprio ... palato.

Prima di concludere questa *apparente divagazione* da temi più consueti, si propongono una considerazione e un consiglio. La prima: probabilmente nel moto di filtrazione nella moka non è trascurabile il ruolo delle interazioni fra i granuli del macinato molto diversi dagli inerti granelli di sabbia di Darcy. Il secondo: sembra molto interessante il filmato – accelerato di quattro volte rispetto alla realtà – che riprende la risalita del caffè in una moka e dovuto a A. Kaestner dello Paul Scherrer Institut (Svizzera) – centro di ricerca multidisciplinare che include anche l'ETH di Zurigo e l'EPFL di Losanna – attualmente disponibile su youtube.

Riferimenti bibliografici

Viparelli, M. (1975). *Lezioni di Idraulica*, Liguori Editore, Napoli.

Curto, G. e Napoli, E. (2006). *Idraulica*, vol. 2, Nuova Editoriale Bios s.n.c., Castrolibero (CS).

